

ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ЖОРСТКИМ КРУГОВИМ ПОВНІСТЮ ЗЧЕПЛЕНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Л.В. Вахоніна, кандидат фізико-математичних наук
Миколаївський державний аграрний університет

Розв'язано задачу про осесиметричні коливання простору з тонким жорстким круговим включенням. Включення вважається повністю зчепленим з пружним середовищем і на відміну від інших робіт передбачається рухливим. Метод вирішення заснований на використанні розривного рішення відповідних рівнянь теорії пружності. Це дало можливість звести вихідну крайову задачу до інтегрального рівняння відносно невідомого стрибка напружень на поверхні включення, яке вирішується чисельно.

Ключові слова: гармонічні хвилі, тонке жорстке кругове включення, розривний розв'язок.

Постановка проблеми. Технологічні дефекти або конструктивні елементи у вигляді тонких жорстких включень у деталях машин та інженерних спорудах є джерелами концентрації напружень, які приводять до їх руйнування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблеми статичного деформування пружних тіл з абсолютно жорсткими включеннями досить широко досліджено у роботах [1, 2]. Але в динамічній постановці аналогічних задач розв'язано значно менше для випадків гармонічних коливань.

Мета статті. У статті досліджується напружений стан необмеженого пружного ізотропного тіла, в якому міститься тонке жорстке кругове включення в умовах повного зчеплення при дії гармонічних коливань.

Викладення основного матеріалу. Нехай необмежене пружне тіло знаходиться в умовах осьової симетрії і містить тонке абсолютно жорстке включення у вигляді тонкої кругової пластини товщиною h і радіуса a . У тілі відбуваються гармонічні коливання у результаті розповсюдження у ній пружних хвиль. Розглядається декілька випадків хвильової дії. У першому випадку у середовищі розповсюджуються циліндричні хви-

лі розширення–стиснення. Потенціал яких має вигляд [3] і переміщення, викликані цими хвилями, визначаються за формулами

$$\varphi_0(r, z) = \frac{A_0}{\beta_1} J_0(\beta_1 r) e^{i\omega z}, \quad u_r^0 = \frac{i\omega A_0}{\beta_1} J_1(\beta_1 r) e^{i\omega z}, \quad u_z^0 = A_0 J_1(\beta_1 r) e^{i\omega z}. \quad (1)$$

У другому випадку в тілі розповсюджуються циліндричні хвилі зсуву з потенціалом [3], що викликають у середовищі переміщення

$$\psi_0(r, z) = \frac{B_0}{\beta_2} J_0(\beta_2 r) e^{i\omega z}, \quad u_r^2 = B_0 J_0(\beta_2 r) e^{i\omega z}, \quad u_z^2 = \frac{i\omega B_0}{\beta_2} J_1(\beta_2 r) e^{i\omega z}. \quad (2)$$

У формулах (1) – (2) прийнято позначення:

$$\kappa_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad \beta_k = \sqrt{\kappa_k^2 - \gamma^2}, \quad k = 1, 2, \quad c_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, \quad c_2^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1},$$

де λ_1, μ_1 – постійні Ламе матриці, ρ_1 – густина матриці.

Нехай включення з обох сторін повністю зчеплене з матрицею. Тоді мають місце такі граничні умови, які внаслідок малої товщини включення формулюються на його серединній площині:

$$\langle \sigma_z \rangle = \sigma_z(r, -0) - \sigma_z(r, 0) = \chi_1(r), \quad \langle \tau_{rz} \rangle = \tau_{rz}(r, 0) - \tau_{rz}(r, 0) = \chi_2(r), \quad (3)$$

$$u_z(r, \pm 0) = d, \quad u_r(r, z=0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (4)$$

де $\chi_1(r)$, $\chi_2(r)$ – невідомі стрибки нормального і дотичного напружень на включенні, d – невідома амплітуда поступального переміщення включення вздовж осі oz . Це переміщення знаходиться з рівняння руху включення, як твердого тіла [4], яке у разі гармонічних коливань записується у вигляді

$$-m_0 \omega^2 d - P - 2\pi \int_0^a r \chi_1(r) dr, \quad (5)$$

де $m_0 = \pi a^2 h \rho_0$ – маса включення; ρ_0 – густина включення.

При дії на включення хвилі, що розповсюджуються у матриці, у рівнянні (5) слід вважати $P = 0$.

Для розв'язання сформульованої задачі переміщення у матриці представимо у вигляді:

$$u_r = u_r^0 + u_r^1, \quad u_z = u_z^0 + u_z^1. \quad (6)$$

У цьому поданні u_r^0, u_z^0 – знаходяться за формулами (1), (2), якщо з включенням взаємодіють хвилі. Доданки u_r^1, u_z^1 – це переміщення, що викликані хвилями, джерелом яких є саме включення. Вони представляються розривним розв'язком рівнянь Ламе [2] зі стрибками (3):

$$\begin{aligned} u_z^1 &= \int_0^\alpha \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} g_{31}(\eta, r, z) d\eta + \int_0^\alpha \frac{\chi_2(\eta)}{\mu_1} g_{32}(\eta, r, z) d\eta, \\ u_r^1 &= \int_0^\alpha \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} g_{41}(\eta, r, z) d\eta - \int_0^\alpha \frac{\chi_2(\eta)}{\mu_1} g_{42}(\eta, r, z) d\eta. \end{aligned} \quad (7)$$

Формули (7) визначатимуть переміщення у матриці за умови, що будуть знайдені стрибки напружень $\chi_1(\eta)$ і $\chi_2(\eta)$. Для їх визначення належить скористатися умовами (4). Після підстановки виразів (6), (7) у (4) отримаємо два інтегральні рівняння відносно невідомих стрибків напружень

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} F_{31}(\eta, r) d\eta - d - p_1(r), \\ \int_0^\alpha \frac{\chi_2(\eta)}{\mu_1} F_{42}(\eta, r) d\eta = -p_2(r), \quad 0 \leq r < \alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

де $F_{31}(\eta, r)$ і $F_{42}(\eta, r)$ визначені у [3]

$$p_1(r) = -u_z^0(r, \pm 0), \quad p_2(r) = -u_r^0(r, 0). \quad (9)$$

Система (8) після здійснення перетворень, детально викладених у [6], набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-}^1 g_+(y) R_+(y, \xi) dy - d_1 - f_1(\xi), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-}^1 g_-(y) R_-(y, \xi) dy - f_2(\xi), \quad \xi \in (1, 1). \end{aligned} \quad (10)$$

У цих рівняннях функції $R_k(x)$ ($k=3, 4$) визначаються інтегралами

$$R_k(x) = \kappa_c \int_0^{\infty} B_k(u) \cos \kappa_c x u \, du, \quad (k=3, 4), \quad (11)$$

де $B_3(u) = \frac{u\sigma(u)}{\sqrt{u^2-1}}$; $B_4(u) = \frac{u\sigma(u)}{\sqrt{u^2-\xi^2}}$; $\sigma(u) = u^2 \sqrt{u^2-1} \sqrt{u^2-\xi^2}$.

Вибір гілок радикалів у формулах (11) і у подальшому визначається відповідно до принципу випромінювання [3] і здійснюється так, щоб виконувалася рівність

$$\sqrt{u^2-\xi^2} - i\sqrt{\xi^2-u^2}, \quad |u| \leq \xi, \quad \sqrt{u^2-1} - i\sqrt{1-u^2}, \quad |u| \leq 1.$$

Функції $B_k(u)$, що входять в інтеграли (11), є обмеженими при $u \rightarrow \infty$, і тому ці інтеграли необхідно розуміти в узагальненому значенні. Для встановлення цього значення слід скористатися формулами (3.753) з [7] і формулами диференціювання узагальнених функцій [8], які мають вигляд [5].

У правих частинах рівнянь (10) при взаємодії з включенням циліндричної хвилі розширення – стиснення, маємо

$$f_1(\xi) = \frac{i\alpha_1 \alpha}{b} \cos(\kappa_0 b_2 \xi), \quad f_2(\xi) = -\alpha \sin(\kappa_0 b_2 \xi),$$

а якщо циліндрична хвиля поперечного зсуву, то

$$f_1(\xi) = \beta \cos(\kappa_0 b_2 \xi), \quad f_2(\xi) = \frac{\beta d_2}{b_2} \sin(\kappa_0 b_2 \xi)$$

За допомогою формул [5], а також властивостей \mathfrak{B} – функції і її похідних, рівняння (10) перетворюються до вигляду

$$b\eta_k(\xi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}_k(\nu) Q_{\nu, 2}(\nu - \xi) d\nu = \begin{cases} d_1 f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{cases}, \quad \xi \in (1, 1), \quad k=1, 2. \quad (12)$$

До рівнянь (12) необхідно додати ще і рівність (5), яка після введення нових функцій і позначень [5] приводиться до вигляду:

$$d_2 = \frac{2\bar{\rho}}{\pi \kappa \kappa_0} \left[\int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}_1(\nu) - \rho_1 \right]; \quad \rho_1 = \frac{P}{2a^2 \bar{\rho}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \rho = \frac{k}{a}. \quad (13)$$

Для наближеного визначення невідомих функцій і амплітуди d_0 вирази (12), (13) замінимо системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$b g_j(y_\alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n A_{\nu k} g_k(y_{\nu}) Q_{\nu} z(y_\alpha - y_j) - d_0 + f_1(y_j) = f_2(y_j), \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$d_0 = \frac{2\rho}{\pi \varepsilon K_j} \left[\sum_{\nu=1}^n g_1(y_\alpha) A_{\nu 0} - P_0 \right], \quad (14)$$

де $A_{\nu k} = \left(-\frac{2}{y_\nu} \right) \left[\frac{2}{P'_\nu(y_\nu)} \right]^2$, $P_\nu(y)$ – многочлен Лежандра, y_ν , $(\nu=1, 2, \dots, n)$ – корені многочлена Лежандра.

Після розв'язання системи (14) невідомі функції наближаються інтерполяційним многочленом

$$g_k(y) = \sum_{\nu=1}^n g_k(y_\nu) \left(y - y_\nu \right) P'_\nu(y_\nu), \quad k=1, 2. \quad (15)$$

Величиною, яка характеризує концентрацію напружень у середовищі за наявності включення, такі ж як і у [1], вважаємо коефіцієнти при особливості стрибка напружень

$$K_j = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \chi_j(r).$$

Після підстановки значень стрибків і обчислення границі отримаємо:

$$K_j = \sqrt{2\alpha} \mu_j N_j, \quad N_j = \frac{g_j(0)}{\pi} = \sum_{\nu=1}^n \frac{g_j(y_\nu)}{(1 - y_\nu) P'_\nu(y_\nu)}. \quad (16)$$

За допомогою формул (14), (16) було проведено чисельне дослідження залежності коефіцієнтів N_j ($j=1, 2$) і амплітуди коливачів включення від безрозмірної частоти. При розрахунках вважалося, що $\varepsilon = 0,05$, $\rho = 1$, $\alpha = \beta = 1$, $\rho_0 = 1$. Число вузлів інтерполяції у формулах (15) сягало 20, що забезпечило отримання усіх результатів з відносною похибкою, що не перевищувала 0,1%.

На рис.1, рис.2 і рис.3 показано графіки залежності від безрозмірної частоти $|N_1|$ і N_2 та $|d_0|$ при взаємодії з включен-

ням циліндричної повздовжньої хвилі для відповідних значень хвильової сталої d_1 .

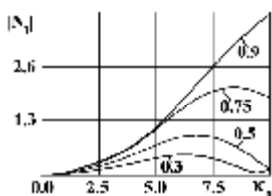


Рис.1.

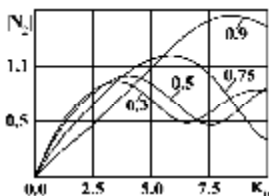


Рис.2.

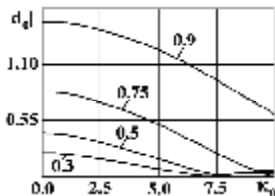


Рис.3.

При зростанні цього параметра концентрація напружень навколо включення збільшується, а також існує наявність частот, при яких $|N_1|$ і $|N_2|$ мають максимуми. У цілому при дії циліндричної повздовжньої хвилі $|N_1| > |N_2|$. Графіки на рис.3 показують, що амплітуда коливань включення при зростанні частоти спочатку спадає, а для великих значень частоти залежність приймає осцилюючий характер. При зростанні хвильової сталої d_1 значення амплітуди збільшується. Поведінка $|N_1|$, $|N_2|$ і $|d_0|$ при взаємодії з включенням циліндричної хвилі поперечного зсуву демонструється графіками на рис.4-6. Можна бачити, що при цьому залежність частоти і хвильової сталої d_2 такі ж, як і в попередньому випадку, але $|N_2| > |N_1|$.

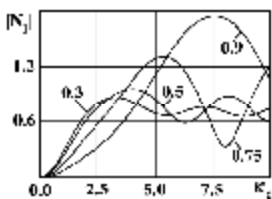


Рис.4.

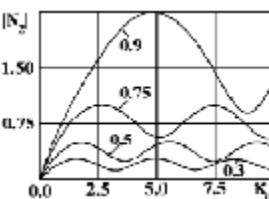


Рис.5.

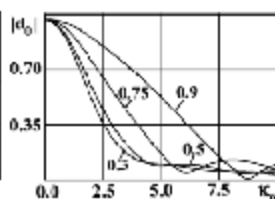


Рис.6.

Висновки. Аналіз графіків показує, що при повному зчепленні біля жорсткого включення концентрація напружень змінюється залежно від виду гармонічних коливань. Тому при розрахунках на міцність конструкцій і деталей машин необхідно враховувати види хвильової дії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. — М. : Наука, 1993. — 224 с.
2. Попов Г. Я. Построение разрывных решений дифференциальных уравнений теории упругости для слоистой среды с межфазными дефектами / Попов Г. Я. // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 6. — С. 769—773.
3. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / Гринченко В. Т., Мелешко В. В. — К. : Наук. думка, 1981. — 283 с.
4. Перцев А. К. Динамика оболочек и пластин / Перцев А. К., Гринченко В. Т., Платонов Э. Г. — Л. : Судостроение, 1987. — 316 с.
5. Вахонина Л. В. Осесимметричные колебания пространства с тонким жестким круговым включением / Вахонина Л. В., Попов В. Г. // Теория и практика процессов измельчения, разделения, смещения и уплотнения. — Одесса : ОГМА, 2002. — Вып. 9. — С. 28—34.
6. Вахонина Л. В. Взаимодействие упругих волн с тонким жестким круговым включением в случае гладкого контакта / Вахонина Л. В., Попов В. Г. // Теорет. и прикладная механика. — 2003. — Вып. 38. — С. 158—166.
7. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений / Градштейн И. С., Рыжик И. М. — М., 1971. — 1108 с.
8. Кеч В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике / Кеч В., Теодореску П. — М., 1978. — 520 с.