УДК 624.04+539.3

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАБОЧИХ ОРГАНОВ МАШИН С ОБРАБАТЫВАЕМЫМИ НЕУПРУГИМИ СПЛОШНЫМИ СРЕДАМИ. ЧАСТЬ 3

В.С. Ловейкин*, доктор технических наук, профессор*
Ю.В. Човнюк*, кандидат технических наук, доцент*
Ю.О. Ромасевич*, аспирант*
Национальный университет биоресурсов и природоиспользования Украины
К.Н. Думенко*, кандидат технических наук, доцент*
Николаевский государственный аграрный университет

Описан эффект самовоздействия в анизотропных нелинейно-упругих (резонансных) средах для комплексной амплитуды с получением нелинейного уравнения типа Хироты, которое является комбинацией уравнения Шридингера и комплексного модифицированного уравнения Корвета-де Вриза.

Ключевые слова*: распространение нелинейных волн, неупругие сплошные среды, строительные машины.*

Постановка проблемы. Во всех реальных материалах при воздействии на них рабочих органов строительных машин с обрабатываемыми (неупругими сплошными) средами, протекают волновые процессы, причем расчет характеристик параметров этих волн составляет зачастую основу динамического расчета соответствующей конструкции строительной машины, выполненной из того или иного материала (в соответствии с эффектом Зоммерфельда существует обратное воздействие обрабатываемой среды на рабочий орган машины для приготовления смесей в строительстве и сельском хозяйстве. В настоящий момент методы динамического расчета конструкций строительных машин (в частности, их рабочих органов) и обрабатываемых сред, находящих в упругой стадии, хорошо разработаны и по ним имеется обширная научно-техническая и справочная литература. Значительно меньшее число исследований посвящено проблемам динамики/статики систем, работающих за пределами упругих состояний (работы Гениева Г.А., Аксентяна Г.К., Рахматулина Х.А., Прагера В.).

Вопросы распространения неупругих волн деформаций рассматриваются главным образом для одномерных задач [2], реже – для двух- и трехмерной постановки [3].

Анализ последних исследований и публикаций. Вопросы распространения неупругих волн деформаций рассматривались ранее главным образом для одномерных задач – в трудах Х.А. Рахматулина и его школы (например в работе [5]). Некоторые вопросы распространения, закономерности, особенности пространственно-временной эволюции волнообразований в неупругих средах (в двух- и трехмерной постановке) изучены в [1, 3], а статические задачи для затвердевающих сред были предметом исследований авторов [3, 5]. Однако, следует заметить, цитируемые работы (по-видимому, ввиду сложности, нелинейных свойств моделируемых сред) посвящены, в основном, анализу скоростей распространения волн, поддерживаемых обрабатываемыми средами, либо анализу сил, напряжений, деформаций, возникающих в затвердевающих средах (для частных случаев, геометрии тел) при рассмотрении одномерных, плоских и пространственных задач статики, при оценке несущей способности систем (в т.ч. рабочих органов строительных машин) из хрупких материалов.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы, которым посвящена статья. Не проведен анализ условий возникновения (зарождения) волнообразований, пространственно-временной эволюции нелинейных волн/волновых пучков, их устойчивости, трансформации в нелинейные периодические воны стационарного профиля (т.н. кноидальные) либо в уединенные (солитоны), характерных для неупругих сплошных сред, имеющих как правило, нелинейные физические/геометрические свойства, обладающих дисперсией (и диссипацией), процессов самовоздействия интенсивных волновых пучков.

Цель настоящей статьи состоит в установлении основных особенностей/закономерностей возникновения, пространственно-временной эволюции нелинейных волнообразований (нелинейных волн, нелинейных волновых пучков), возникающих при взаимодействии рабочих органов строительных машин с обрабатываемыми неупругими сплошными средами, трансформации указанных волн в волны стационарного профиля (в приближении волнового пучка), в создании адекватной физико-механической модели/уравнений рассматриваемых процессов, которая бы учитывала физическую и геометрическую нелинейности среды, дисперсию (и диссипацию) методами, развитыми в работах [4, 5].

Изложение основных результатов исследования. Для получения дифференциального уравнения амплитуды огибающей волн, распространяющихся в обрабатываемой среде, а также приближения волновых пучков используем подходы, развитые в [12]. Установим дифференциальное уравнение для амплитуды огибающей волнообразований (приближение волновых пучков), распространяющихся в обрабатываемой среде. (Модели последней рассмотрены в предыдущем пункте).

Важнейшей характеристикой обрабатываемой линейной среды является ее закон дисперсии $F(\vec{k}, \Omega)$, где Ω – частота, $\vec{k}$ – волновой вектор волн, поддерживаемых этой средой. Указанный закон определяет число и характер нормальных волн. При разработке и обосновании различных приближенных методов решения физических (физико-механических) задач часто полезным оказывается исследование топологических свойств функции $F(\vec{k}, \Omega)$. С точки зрения задач волнообразований и их последующего распространения в виде стационарных волновых пучков (Ω = *const*) закон дисперсии $F(\vec{k}, \Omega)$ устанавливает связь между четырьмя величинами: тремя компонентами волнового вектора $\vec{k}$ и собственно частотой Ω. Корни дисперсионного уравнения относительно Ω представим в явном виде:

$$\Omega^{(j)} = \Omega^{(j)}(k_x, k_y, k_z), \quad j = \overline{1, \tilde{N}}, \tag{1}$$

где индекс l нумерует типы нормальных волн в среде (всего их $\tilde{N}$), а ось $\vec{M}$, вдоль которой распространяется волна, выбирается в соответствии с геометрией задачи. При рассмотрении неравновесных (неупругих) сред соотношения (1) становятся комплексными. В случае неограниченной (неупругой) среды, если в плоскости M=0 заданы амплитуды всех нормальных волн, общее решение задачи может быть представлено через фурье-интеграл:

$$\vec{E}(\vec{r}, \Omega) = \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_l(k_x, k_y, k_z) \exp\{i[k_x x + k_y y + k_z z - \Omega^{(l)}(k_x, k_y, k_z)t]\} \times$$
$$\times dk_x dk_y dk_z, \quad i^2 = -1, \tag{2}$$

$$\vec{E}_l(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\xi, \eta, \zeta) \exp\{-i[k_x\xi + k_y\eta + k_z\zeta]\} d\xi d\eta d\zeta. \tag{3}$$

Топология любой из 2N поверхностей (1) в общем случае может быть очень сложной, однако для волнового пучка, поперечные размеры которого немного больше длины волны излучения (λ), существенным при интегрировании в (2) оказываются только небольшие участки этих поверхностей, которые мы будем предполагать достаточно гладкими и взаимно не пересекающимися. Кроме того, распространяющуюся в обрабатываемой среде волну считаем квазимонохроматической, ($\left|\frac{\Delta\Omega^{(l)}}{\Omega^{(l)}}\right| \ll 1$ где $\Delta\Omega^{(l)}$ – девиация частоты l-ой нормальной волны). Существенные спектральные амплитуды $\vec{E}_l(k_x, k_y, k_z)$ сосредоточены на l-й поверхности в окрестности точки ($\Omega_0^{(l)}$, $\vec{k}_0^{(l)}$) с эффективным поперечником $\varkappa^{(l)}_{x,y,z}$, удовлетворяющим неравенству:

$$\varkappa^{(l)}_{x,y,z} \ll \min\{k^{(l)}_{x0},\ k^{(l)}_{y0},\ k^{(l)}_{z0}\}, \tag{4}$$

либо

$$\varkappa^{(l)}_{x,y,z} \ll \left|\vec{k}_0^{(l)}\right| \quad \sqrt{(k^{(l)}_{x0})^2 + (k^{(l)}_{y0})^2 + (k^{(l)}_{z0})^2}. \tag{5}$$

В случае нефокусированного пучка $\chi_{x,y,z}^{m} \sim a_{x,y,z}^{-1}$, $a_{x,y,z}$ – его характерные поперечные размеры вдоль соответствующих осей декартовой системы координат.

Предположим, что структура волнового поля при M=0 обусловливает возбуждение в неупругой среде только одной нормальной моды. Введем радиус-вектор $\vec{\chi}=\vec{k}-\vec{k}_{\|}$ и запишем $\Delta\Omega=\Omega-\Omega_{\|}$. Тогда общее решение (2) можно представить в виде двух множителей, один из которых в силу неравенства (4) или (5) медленно меняющийся:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{s}A(\vec{r},t)e^{i(\vec{k}_{\|}\vec{r}-\Omega_{\|}t)},\quad |\vec{s}|=1, \tag{6}$$

$$A(\vec{r},t)=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}A(\chi_x,\chi_y,\chi_z)\exp(i[\chi_x x+\chi_y y+\chi_z z-\Delta\Omega t])\times d\chi_x d\chi_y d\chi_z, \tag{7}$$

где $A(\chi_x,\chi_y,\chi_z)$ определяется аналогично (3), индекс 1 здесь и в дальнейшем опускаем. Разложим функцию $\Delta\Omega(\chi_x,\chi_y,\chi_z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\chi_x=\chi_y=\chi_z=0$:

$$\Delta\Omega(\chi_x,\chi_y,\chi_z)=\sum_{n=1,m,j=0}^{M^*}P_{nmj}\chi_x^{n-m-j}\chi_y^{m}\chi_z^{j}, \tag{8}$$

где $$P_{nmj}=\frac{1}{(n-m-j)!\,m!\,j!}\frac{\partial^{n}\Omega}{\partial\chi_x^{n-m-j}\partial\chi_y^{m}\partial\chi_z^{j}}\bigg|_{\vec{\chi}=(0,0,0)}. \tag{9}$$

Подстановка (8) в подинтегральное выражение (7) при фиксированном M* и начальном распределении $A(\xi,\eta,\zeta)$ решает задачу распределения $A(\vec{r},t)$ во всех точках M≠0 с требуемой точностью.

В задачах анализа волнообразований и последующего их распространения в неупругих средах вместо интегрального решения (7) удобно иметь приближенное дифференциальное уравнение для амплитуды $A(\vec{r},t)$. Соответственно взятому числу членов разложения (8) интегральное представление (7) позволяет сформировать уравнение:

$$i\frac{\partial A}{\partial t} - \sum_{n+m+j\geq 1}^{\infty} (-i)^n (-1)^j P_{nmj} \frac{\partial^{n} A}{\partial x^{n} \partial y^{m} \partial z^{j}} = 0, \qquad (10)$$

фурье-образом которого в k-пространстве является соотношение (8). Поскольку в x-, y-, z-направлениях обрабатываемая среда предполагается неограниченной, а начальное распределение $\vec{E}(\xi, \eta, \zeta)$ имеет фурье-преобразование (3), граничные условия при $|x|, |y|, |z| \to \infty$ можно считать нулевыми для всех производных по x, y и z. Таким образом, понижение порядка исходной системы дифференциальных уравнений по переменной t до единицы в рамках неравенств (47), (48) и $\left|\frac{\Delta\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}\right| \ll 1$ влечет за собой появление в (10) производных сколь угодно высокого порядка по x, y и z, причем члены, содержащие s-ю производную, являются малыми членами порядка $(\alpha_s^{(1)}/|k_0^{(1)}|)^s$.

Ограничиваясь в (8) учетом только квадратичных членов разложения, получаем квазипараболическое уравнение:

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + P_{200}\frac{\partial^2 A}{\partial (x')^2} - P_{110}\frac{\partial^2 A}{\partial x' \partial y'} + P_{101}\frac{\partial^2 A}{\partial x' \partial z'} - P_{011}\frac{\partial^2 A}{\partial y' \partial z'} -$$

$$+ P_{002}\frac{\partial^2 A}{\partial (z')^2} - P_{020}\frac{\partial^2 A}{\partial (y')^2} = 0, \qquad (11)$$

где $x' = x - P_{100}t,\ y' = y - P_{010}t,\ z' = z + P_{001}t$. Величины P_{100}, P_{010}, P_{001} определяют наклон лучевого вектора к оси $\vec{M}$, а различие коэффициентов $P_{2ij}, (i, j) = (0, 1, 2),\ i + j \leq 2$, в (11) обусловлено различной кривизной поверхности $\Omega(k_x, k_y, k_z)$ в ортогональных направлениях. В простейшем случае изотропной неупругой среды ось $\vec{M}$ можно выбрать в качестве направления распространения луча ($k_{x0} = k_{y0} = k_{z0} = 0$). Вычисление коэффициентов (9) показывает, что в уравнении (11) содержатся только члены с четными n и $m = \overline{(0, n)}$; $j = \overline{(0, n)}$. Причем: $P_{jj} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial k_j^2}$;

$$P_{110}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial k_x\partial k_y};\quad P_{101}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial k_x\partial k_z};\quad P_{011}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial k_y\partial k_z};\quad P_{002}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial k_z^2};\quad P_{020}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial k_y^2};$$

$$P_{400}=\frac{\partial^4\Omega}{24\partial k_x^4};\quad P_{022}=\frac{\partial^4\Omega}{4\partial k_y^2\partial k_z^2}$$ и т.д.

Для того, чтобы использовать полученные выше значения скоростей N для различных моделей неупругих сред необходимо их связать с групповой скоростью распространения волн (волнообразований, волновых пучков), как с реальной скоростью, поддерживаемой обрабатываемой средой. Следует помнить, что именно с групповой, а не с фазовой! скоростью в среде переносится энергия.

Так, $P_{100}=\frac{\partial\Omega}{\partial k_x}$; $P_{010}=\frac{\partial\Omega}{\partial k_y}$; $P_{001}=\frac{\partial\Omega}{\partial k_z}$. Поэтому вектор групповой скорости волны, распространяющейся в обрабатываемой среде, обозначим $\vec{V}_g$. Последний имеет следующие компоненты:

$$\vec{V}_g=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_x};\ \frac{\partial\Omega}{\partial k_y};\ \frac{\partial\Omega}{\partial k_z}\right). \tag{12}$$

Тогда: $$\left|\vec{V}_g\right|=\left\{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Используя (12), (13), можем записать:

$$N^2=\left|\vec{V}_g\right|^2=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_z}\right)^2. \tag{14}$$

Особенности эффектов самовоздействия волнообразований в нелинейных неупругих анизотропных средах, обрабатываемыми рабочими органами строительных машин

Рассмотрение интенсивного волнового пучка с узким угловым спектром в неупругой анизотропной среде, обрабатываемой рабочими органами строительных машин (ударное/виброударное воздействие или обработка указанной среды), исследуем, включив в дисперсионное уравнение (1) зависимость от $|A|^2$, где A – амплитуда нелинейной волны [6].

Предполагая пучок одномерным, ограничимся в разложении Ω только линейными по $|A|^2$ членами:

$$\Delta\Omega(k_x, |A|^2) = P_{100}\Delta k_x - P_{200}\Delta k_x^2 + P_{300}\Delta k_x^3 + q_1|A|^2 + q_2\Delta k_x|A|^2 + \ldots, \qquad (15)$$

где $q_1 = \dfrac{\partial\Omega}{\partial|A|^2}$; $q_2 = \dfrac{\partial P_{100}}{\partial|A|^2}$; $\Delta k_x = k_x - k_{x0}$; коэффициенты P_{i00} определены выше.

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид известного уравнения Хироты [6]:

$$i\left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{q_2}{3}\left(2|A|^2\frac{\partial A}{\partial x} + A^2\frac{\partial A^*}{\partial x}\right) - P_{300}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right] + P_{200}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - q_1|A|^2 A = 0. \qquad (16)$$

Восстановление уравнения (16) по разложению (15) однозначно, за исключением последнего слагаемого, которое дает более сложную конструкцию в силу того, что $(A^2A^*)_x = 2|A|^2A_x + A^2A_x^*$. (Здесь символ ()* означает комплексно-сопряженную величину).

Обычно эффекты самовоздействия исследуются в рамках нелинейного уравнения Шредингера ($P_{300} = q_2 = 0$). Его устойчивость по отношению к продольным возмущениям определяется условием $q_1P_{200} < 0$ [6].

При этом вдали от резонансов P_{200} имеет вполне определенный знак и свойство нелинейной неупругой среды фокусировать или дефокусировать луч определяется исключительно знаком q_1. В окрестности резонансов ситуация существенно изменяется. Оказывается, что при переходе через резонанс знак q_1 остается постоянным, а из-за изменения знака дисперсии образование солитонов имеет место только с одной стороны от резонанса, например, слева. Проявление самих нелинейных свойств в резонансных нелинейных неупругих средах также специфично. Дело в том, что нормальной волной является суперпозиция мод невзаимодействующих подсистем. Каждая из них характеризуется своими нелинейными свойствами, вклад которой определяется весом данной моды в связанной волне. Будем называть эти нелинейности расстроечными, подчеркивая тем самым зависимость невозмущенных частот от амплитуды. Кроме того, имеет место еще и нелинейность взаимодействия, которая характеризуется зависимостью параметра связи от амплитуды. Простейшим параметром проявления этой нелинейности является феномен нелинейного „коллективного” поведения осцилляторов (синергетические эффекты) квазикристаллической решетки, возникающий при прохождении волны через обрабатываемую нелинейную неупругую середу, моделируемую на финальной (завершающей) стадии уплотнения вибрационным полем совокупностью невзаимодействующих осцилляторов. При этом свободное поле описывается линейным волновым уравнением, а осцилляторы моделируются как квазилинейны.

Число различных нелинейностей неупругой среды, таким образом, должно определятся количеством независимых параметров дисперсионного уравнения (1), и поэтому их результирующее действие, по крайней мере качественно, можно исследовать, вводя зависимость этих параметров от амплитуды.

Ввиду громоздкости для характерных нелинейной неупругой среде взаимодействий эти коэффициенты здесь не приведены.

В зависимости от выбранных направления распространения и частоты коэффициенты $q_{1,2}$ могут менять знак. Кроме того, $q_{1,2}$ имеют полюсы на краях области нераспространения. Выбором направления распространения и частоты в пределах полосы существования волн в среде можно добиться одновременного обращения в нуль коэффициентов P_x и q.

В этом случае самовоздействие пучка волны в нелинейной неупругой среде описывается комплексным модифицированным уравнением Кортевега-де Вриза. В гидродинамике это уравнение для действительной функции также используется в тех случаях, когда коэффициент при нелинейном члене в уравнении Кортевега-де Вриза по каким-либо причинам обращается в нуль. „Однонаправленность” этого типа уравнений определяет в данном случае, кроме асимметрии, явление самофокусировки, а также эффект самоискривления траектории луча или лучей, если начальное условие задачи допускает образование солитонов. В общем же случае (16) есть комбинация нелинейного уравнения Шредингера и комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза, в котором роль каждого члена определяется заданным направлением распространения волн с рабочей частотой, на которой анализируют пространственно-временную эволюцию волнообразований в нелинейной неупругой среде, вызванных эффектами взаимодействия обрабатываемого материала/смеси с рабочим органом строительной машины.

Выводы. 1. При описании эффектов самовоздействия в таких средах для комплексной амплитуды получено нелинейное уравнение типа уравнения Хироты, являющееся комбинацией нелинейного уравнения Шредингера и комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза.

2. Полученные результаты по созданию физико-механической модели обрабатываемых рабочими органами строительных и сельскохозяйственных машин нелинейных упругих сред (типа строительных/бетонных смесей) в процессах вибро- и виброударного формирования могут служить основой для коррекции и уточнения существующих методик инженерного расчета динамических характеристик волн (волнообразований), возникающих при подобном взаимодействии, а также параметров прочности важных узлов самих строительных машин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Особенности распространения нелинейных волн при взаимодействии рабочих органов машин с обрабатываемыми неупругими сплошными средами. частина 1 / [В.С. Ловейкин , Ю. В. Човнюк, Ю. О. Ромасевич, К. Н. Думенко и др.] / Вісник аграрної науки Причорномор'я. — Миколаїв, 2008. — Вип. 4 (47). — С. 230—238.

2. Рахматулин Х. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках / Х. А. Рахматулин, Ю. А. Демьянов. — М. : Наука, 1961. — 350 с.

3. Гениев Г. А. Вопросы механики неупругих тел / Г. А. Гениев, В. С. Лейтес. — М. : Строиздат, 1981. — 161 с.

4. Гениев Г. А. Некоторые вопросы статики сплошной среды / Гениев Г. А. // Строительная механика и расчет сооружений. — 1969. — № 1.
5. Ивлев Д. Д. К теории идеально-затвердевающих сред / Ивлев Д. Д. // ДАН СССР. — 1960. — Т.130, № 4.
6. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / Карпман В. И. — М. : Наука, 1973. — 320 с.
7. Ильюшин А. А. Пластичность / Ильюшин А. А. – М. : ОГИЗ, 1948. — 480 с.
8. Гениев Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона / [Гениев Г. А., Киссюк В. Н., Тюпин Г. А.] — М. : Стройиздат, 1974. — 250 с.
9. Особенности распространения нелинейных волн при взаимодействии рабочих органов машин с обрабатываемыми неупругими сплошными средами. Часть 2 / [В. С. Ловейкин, Ю. В. Човнюк, Ю. О. Ромасевич, К. Н. Думенко] // Вісник аграрної науки Причорномор’я. — Миколаїв, 2009. — Вип. № 3 (50). — С. 234—246.