УДК 624.04+539.3

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАБОЧИХ ОРГАНОВ МАШИН С ОБРАБАТЫВАЕМЫМИ НЕУПРУГИМИ СПЛОШНЫМИ СРЕДАМИ ЧАСТЬ 2

***В.С.Ловейкин**, доктор технических наук, профессор*
***Ю.В.Човнюк**, кандидат технических наук, доцент*
***Ю.О.Ромасевич**, аспирант*
Национальный университет биоресурсов и природоиспользования Украины
***К.Н.Думенко**, кандидат технических наук, доцент*
Николаевский государственный аграрный университет

*Отримано лінійне диференціальне рівняння **n**-го порядку, яке описує еволюцію повільно змінної комплексної амплітуди довільної моди з точністю **(λ/a)n**, де λ – довжина хвилі випромінювання, a – характерний поперечний розмір пучка. При опису ефектів самовпливу у таких середовищах для комплексної амплітуди отримано нелінійне рівняння типу рівняння Хіроти, яке є комбінацією рівняння Шредінгера та комплексного модифікованого рівняння Корвета-де Вріза.*

***Ключові слова:** хвильові процеси, рівняння Хіроти, ефект самовпливу, хвилі деформацій.*

Постановка проблемы. Во всех реальных материалах при воздействии на них рабочих органов строительных машин с обрабатываемыми (неупругими сплошными) средами, протекают волновые процессы, причем расчет характеристик параметров этих волн составляет зачастую основу динамического расчета соответствующей конструкции строительной машины, выполненной из того или иного материала (в соответствии с эффектом Зоммерфельда существует обратное воздействие обрабатываемой среды на рабочий орган (строительной) машины). В настоящий момент методы динамического расчета конструкций строительных машин (в частности, их рабочих органов) и обрабатываемых сред, находящих в упругой стадии, хорошо разработаны и по ним имеется обширная научно-техническая и справочная литература. Значительно меньшее число исследований посвящено проблемам динамики/статики систем, работающих за пределами упругих состояний (работы Гениева Г.А., Аксентяна Г.К., Рахматулина Х.А., Прагера В.).

Вопросы распространения неупругих волн деформаций рассматриваются в основном для одномерных задач [2], реже – для двух- и трехмерной постановки [3].

Анализ последних исследований и публикаций. Вопросы распространения неупругих волн деформаций рассматривались ранее, главным образом, для одномерных задач – в трудах Х.А. Рахматулина и его школы (например в работе [5]). Некоторые вопросы распространения, закономерности, особенности пространственно-временной эволюции волнообразований в неупругих средах (в двух- и трехмерной постановке) изучены в [1, 3], а статические задачи для затвердевающих сред были предметом исследований авторов [3, 5]. Однако, следует заметить, цитируемые работы (по-видимому, ввиду сложности, нелинейных свойств моделируемых сред) посвящены, в основном, анализу скоростей распространения волн, поддерживаемых обрабатываемыми средами, либо анализу сил, напряжений, деформаций, возникающих в затвердевающих средах (для частных случаев, геометрии тел) при рассмотрении одномерных, плоских и пространственных задач статики, при оценке несущей способности систем (в т.ч. рабочих органов строительных машин) из хрупких материалов.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы, **которым посвящена данная статья**. Анализ условий возникновения (зарождения) волнообразований, пространственно-временной эволюции нелинейных волн/волновых пучков, их устойчивости, трансформации в нелинейные периодические волны стационарного профиля (т.н. кноидальные) либо в уединенные (солитоны), характерных для неупругих сплошных сред, имеющих как правило, нелинейные физические/геометрические свойства, обладающих дисперсией (и диссипацией), процессов самовоздействия интенсивных волновых пучков не был проведен.

Цель настоящей статьи состоит в установлении основных особенностей/закономерностей возникновения, пространственно-временной эволюции нелинейных волнообразований (нелинейных волн, нелинейных волновых пучков), возникающих при взаимодействии рабочих органов строительных машин с обрабатываемыми неупругими сплошными средами, трансформации указанных волн в волны стационарного профиля (в приближении волнового пучка), в создании адекватной физико-механической модели/уравнений рассматриваемых процессов, которая бы учитывала физическую и геометрическую нелинейности среды, дисперсию (и диссипацию) методами, развитыми в работах [4, 5].

Изложение основных результатов исследования. Закономерности распространения волн в неупругих обрабатываемых рабочим органом строительной машины, средах: металл, грунт, бетон.

Рассмотрим среду, уравнения состояния которой описываются теорией малых упругопластических деформаций [8], в частности пластичные металлы. Соотношение класса сплошных сред при этом имеют вид:

$$T = G\left(\Gamma\right)\cdot \Gamma,\ \sigma = K\cdot\theta, \tag{1}$$

где $G=G(\Gamma)$ – секущий модуль диаграммы зависимости T от Γ; K=const – модуль объемной деформации.

Таким образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \Gamma} = G + \frac{\partial G}{\partial \Gamma}\Gamma;\ \ \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0;\ \ \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} = 0;\ \ \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = K, \tag{2}$$

а выражение (11) из [1, стр.235] для коэффициентов a_{ij}, a_{ii} записываются в форме:

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} = K + \frac{G}{3} + \frac{4}{\Gamma}\frac{\partial G}{\partial \Gamma} e_{ii} e_{jj}; \\ a_{ii} = K + \frac{4G}{3} + \frac{4}{\Gamma}\frac{\partial G}{\partial \Gamma} e_{ii}^2. \end{cases} \tag{3}$$

Исследование результатов (3), проведенное в [6], показывает, что скорости распространения волн деформаций в рассматриваемой среде существенным образом зависят: 1) от вида напряженного состояния; 2) от взаимной ориентации нормали к фронту и главных осей; 3) от степени развития и пластической деформации в рассматриваемой точке среды.

Анализ соотношения (3) для трех характерных видов напряженно-деформированного состояния плоской деформации неупругой обрабатываемой среды, подчиняющейся теории малых упругопластических деформаций, следует проводить в соответствии с зависимостями:

а) равномерной двухосной деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = 0$;

б) одноосной деформации $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$;

в) чистого сдвига $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = 0$.

При этом зависимость между T и Γ следует принимать в форме:

$$T = G_0\left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_S}\right)\Gamma, \tag{4}$$

а $G = G(\Gamma) = G_0\left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_S}\right)$; $\frac{dG}{d\Gamma} = -\frac{G_0}{2\Gamma_S}$. (5)

Здесь G_0 – начальный модуль сдвига; Γ_S – предельное значение интенсивности деформаций сдвига, соответствующее точке диаграммы, где $dG / d\Gamma = 0$. Следует также принимать, что $K = 5G_0 / 3$.

Анализ векторных диаграмм ($\rho N_1^2 / G_0$ и $\rho N_2^2 / G_0$) для случая плоской деформации среды, описываемой теорией малых упругопластических деформаций, проведенный

[6] для различных значений отношения Γ/Γ_S $(0 \leq \Gamma/\Gamma_S \leq 1)$, показывает, что (за исключением случая равномерной деформации) диаграммы величин N_1 и N_2 в значительной степени отклоняются от окружностей по мере приближения Γ/Γ_S к единице. В случае чистого сдвига при $\Gamma/\Gamma_S=1$ значение N_2 в направлении главных касательных напряжений равно нулю, а соответствующее значение $N_1 \Rightarrow \max$. При $\Gamma/\Gamma_S \to 0$ независимо от вида напряженно деформированного состояния векторные диаграммы N_1 и N_2 переходят в окружности.

Для сред, обладающих внутренним трением, в частности для реальных грунтов, может быть использована модель сжимаемой жесткоупругопластической среды [9], соотношения уравнения состояния которых описываются теорией малых упругопластических деформаций и имеют вид:

$$T = G_0\Gamma - fK\theta; \quad \sigma = K\theta, \tag{6}$$

где $G_0=\mathrm{const}$ – модуль сдвига при чистом сдвиге $(\sigma=0)$; $K=\mathrm{const}$ – модуль объемной деформации; $0<f<1$ – коэффициент внутреннего трения.

Эта модель позволяет описать основные закономерности деформирования грунтовых сред, в частности, влияние среднего напряжения на вид зависимости между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, некоторые особенности процесса разгрузки, а также реализует возможность непосредственного перехода от зависимостей напряжения-деформации к условию предельного равновесия.

При $\lambda = -f\,\sigma/T \geq 1$ (в [9] сжимающие напряжения и деформации укорочения считались положительными), как это следует из (6), деформаций сдвига в среде не возникает. В этом случае касательные напряжения полностью воспринимаются силами внутреннего трения и состояние среды „жесткое”. При $\lambda = -f\,\sigma/T \leq 1-\tau_s/T$ состояние среды пластическое, τ_s – предельное касательное напряжение.

Деформационные зависимости (6) справедливы при $1-\frac{\tau_s}{T}<\lambda=-f\frac{\sigma}{T}<1$ когда состояние среды „упругое”. Именно для этого случая в работе рассматриваются вопросы распространения нелинейных волн деформаций в неупругой обрабатываемой среде.

На основании (6) имеем условия:

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{A}}=G_0;\quad \frac{\partial T}{\partial \theta}=-fK;\quad \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{A}}=0;\quad \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}=K, \tag{7}$$

и выражения (11) из [1, стр.235] для коэффициентов a_{ij} и a_{ii} записываются в форме:

$$\begin{cases} a_{ij}=K+\frac{G}{3}-\frac{2}{\Gamma}fK(1-\frac{2\theta}{\Gamma^2}e_{ij})e_{jj}; \\ a_{ii}=K+\frac{4G}{3}-\frac{2}{\Gamma}fK(1-\frac{2\theta}{\Gamma^2}e_{ii})e_{ii}, \end{cases} \tag{8}$$

где $G=T/\Gamma=G_0-fK\,\theta/\Gamma$.

Очевидно, что для данной среды, в отличие от (20), $a_{ij}\neq a_{ji}$. Исследование результатов (8) показывает [6], что скорости распространения волн деформаций в рассматриваемой среде существенным образом зависят: 1) от вида напряженного состояния; 2) от взаимной ориентации нормали к фронту и главных осей в рассматриваемой точке среды. Анализ векторных диаграмм (($\rho N_1^2/G_0$ и $\rho N_2^2/G_0$) – приведенных скоростей распространения волн), построенных по соотношениям (8), следует проводить для четырех характерных видов напряженно-деформированных состояний плоской деформации жесткоупругопластической среды:

а) равномерного двухстороннего укорочения $\varepsilon_1=\varepsilon_2<0$, $\varepsilon_2=0$;

б) одноосного укорочения $\varepsilon_1<0$, $\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$;

в) чистого сдвига $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$, $\varepsilon_1<0$, $\varepsilon_3=0$;

г) одноосного удлинения $\varepsilon_1=\varepsilon_3=0$, $\varepsilon_2>0$.

Следует принять $K = 2G_0/\sqrt{3}$ и $f = 0,5$.

За исключением случая равномерной деформации диаграммы величин N_1 и N_2 в значительной степени отклоняются от окружностей [6]. Значение N_1 в направлении деформаций укорочения при прочих равных условиях больше, чем в направлении деформаций удлинения. При чистом сдвиге векторная диаграмма N_1 является эллипсом, диаграмма N_2 – практически не отличается от окружности.

Рассмотрим среду, уравнения состояния которой описываются деформационной теорией пластичности бетона [10].

Соотношения при этом имеют вид (в [10] сжимающие напряжения и деформации укорочения считались положительными):

$$T = G_0\left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_S}\right)\Gamma; \;\; \sigma = K_0\left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_S}\right)\left(\theta - g_0\Gamma^2\right), \qquad (9)$$

где $G_0 = \mathrm{const}$ и $K_0 = \mathrm{const}$ – соответственно начальные модули сдвига и объемной деформации; g_0 – модуль дилатации; $\Gamma_S = \Gamma_S(\lambda) = \Gamma_S(0)\cdot\tilde{k}(\lambda)$ – предельная интенсивность деформаций сдвига; $\tilde{k} = \tilde{k}(\lambda) = \lambda/2 + \sqrt{\lambda^2/4 + 1}$; $\lambda = -f\,\sigma/T$; $\Gamma_S(0)$ – значение Γ_S при чистом сдвиге; f – коэффициент внутреннего трения бетона, определяемый по значениям пределов прочности бетона при одностороннем сжатии R_c, одностороннем растяжении R_p и чистом сдвиге T_c формулой: $f = 3T_c\left(R_c - R_p\right)/\left(R_c R_p\right)$. Предложенная модель позволяет описать основные закономерности деформирования бетона, в частности, влияние среднего напряжения на вид зависимостей между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, зависимость Γ_S от вида напряженного состояния, явление дилатации, а также реализует возможность непосредственного перехода от зависимостей напряжения – деформации к условию прочности бетона. На основании (9) имеем:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial T}{\partial \Gamma} = G_0\left[1-\dfrac{\left(1+3\tilde{k}^2\right)\theta-\left(3+\tilde{k}^2\right)g_0\Gamma^2}{2\left(1+\tilde{k}^2\right)\left(\theta-g_0\Gamma^2\right)}\dfrac{\Gamma}{\Gamma_s}\right];\\
\dfrac{\partial T}{\partial \theta} = -fK_0\dfrac{\tilde{k}}{2\left(1+\tilde{k}^2\right)}\dfrac{\Gamma}{\Gamma_s};\\
\dfrac{\partial \theta}{\partial \Gamma} = -K_0\left[2g_0\left(1-\dfrac{\Gamma}{2\Gamma_s}\right)\Gamma+\dfrac{\left(\theta\tilde{k}^2-g_0\Gamma^2\right)}{\left(1+\tilde{k}^2\right)}\dfrac{1}{\Gamma_s}\right];\\
\dfrac{\partial \sigma}{\partial \theta} = K_0\left[1-\dfrac{1}{\left(1+\tilde{k}^2\right)}\dfrac{\Gamma}{\Gamma_s}\right].
\end{cases}
\qquad (10)
$$

Для данной модели среды, как и для жесткоупругопластической среды, $a_{ij} \neq a_{ji}$. Исследование результатов для бетона показывает, что скорости распространения волн деформаций в последнем существенно зависят [6]:

1) от вида напряженного состояния;

2) от взаимной ориентации нормали к фронту и главных осей;

3) от степени развития пластических деформаций в рассматриваемой точке среды.

Анализ векторных диаграмм ($\rho N_1^2/G_0$ и $\rho N_2^2/G_0$) для случая плоской деформации бетона (для вариантов одноосного укорочения и чистого сдвига), проведенный в [6], показывает, что диаграммы величин N_1 и N_2 в значительной степени отклоняются от окружностей. При $\Gamma/\Gamma_S \to 1$ скорости распространения волн, вообще говоря, уменьшаются.

При одноосном сжатии скорости волн N_1 имеют максимум, расположенный вблизи биссектрисы угла между главными осями; скорости же волн N_2 достигают максимальных значений в направлениях главных осей, где они являются волнами сдвига.

Затвердевающие среды составляют самостоятельный класс сплошных сред и характеризуются рядом специфических свойств, являясь в определенной смысле аналогом пластических сред [4-8].

При описании физических свойств затвердевающих сред, как правило, исходят из положений деформационной теории пластичности. В связи с этим помимо инвариантов напряженного состояния среды: интенсивности касательных напряжений T

$$T^2 = \left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right]/6; \quad (11)$$

и среднего значения σ

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3, \quad (12)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – главные напряжения в среде, вводят в рассмотрение инварианты деформированного состояния: объемную деформацию θ и интенсивность деформаций сдвига Γ:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad (13)$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_z\right)^2 + \left(\varepsilon_z - \varepsilon_x\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

где $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial y}$; $\varepsilon_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$; $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$; $\gamma_{yz} = \dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}$; $\gamma_{xz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}$ – соответственно линейные деформации и деформации сдвига; u_x, u_y, u_z – перемещения.

В дальнейшем будем рассматривать идеальные затвердевающие среды, для которых объемная деформация $\theta = 0$.

Одной из главных физических констант затвердевающей среды является предельная интенсивность деформаций сдвига Γ_0. Следует полагать, что затвердевающие среды обладают конечной прочностью, характеризующейся предельным значением интенсивности касательных напряжений $T = T_0$.

Пластически-затвердевающая среда в начальной стадии деформирования способна воспринимать лишь гидростатическое давление, и приобретает способность воспринимать интенсивные касательные напряжения лишь после достижения величиной $Г$ значения $Г_0$. По видам зависимости между интенсивностью касательных напряжений и интенсивностью деформаций сдвига идеальные затвердевающие среды в данной работе относим к идеальным пластически-затвердевающим средам (аналог идеальной жесткопластической среды).

Для получения искомых скоростей полагаем, что в идеальной жесткопластической среде $\sigma = \chi\tau_s$ (где χ – приведенное среднее напряжение), а соотношения (2) представим в форме:

$$\sigma_i = \chi\tau_s + 2\frac{\tau_s}{Г}l_{ii}; \;\; \tau_{ij} = 2\frac{\tau_s}{Г}l_{ij}. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в динамические уравнения равновесия, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi + 2\frac{l_{ii}}{Г}) + \sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dx_i}(\frac{2l_{ij}}{Г}) + q_i = \frac{1}{k^*}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2};$$

$$(i,\ j) = \overline{(1,\ 3)}; \;\; i \neq j; \;\; q_i = \frac{X_i}{\tau_s}; \;\; k^* = \frac{\tau_s}{\rho}. \qquad (16)$$

Условие несжимаемости имеет вид:

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \qquad (17)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $e_{ii} = \varepsilon_i$ и уравнения (16) можно представить в форме:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x_i} + 2\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{Г}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right] + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{Г}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] + q_i = \frac{1}{k^*}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2};$$

$$\left(i,\ j\right) = \left(1,\ 3\right); \quad i \neq j. \qquad (18)$$

Уравнения (18) являются квазилинейными уравнениями второго порядка относительно функций u_i. Указанные уравнения можно представить [6] в форме:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x_i}+\frac{\nabla^2 u_i}{\Gamma}+\frac{1}{\Gamma}\sum_{j=1}^{3}\left(1-\psi_i\psi_j\right)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i x_j}+q_i=\frac{1}{k^*}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2};\ i=\left(1,3\right), \quad (19)$$

где $\psi_i=2\varepsilon_i/\Gamma$ – приведенные значения главных деформаций. Величины ψ_i связаны между собой следующими очевидными соотношениями:

$$\begin{cases}\psi_1+\psi_2+\psi_3=0;\\ (\psi_1-\psi_2)^2+(\psi_2-\psi_3)^2+(\psi_3-\psi_1)^2=6.\end{cases} \quad (20)$$

В [6] определены скорости распространения трехмерных волн – поверхностей слабых разрывов деформаций и напряжений (первых производных u_i и функции χ). Очевидно, что данные волны представляют собой также поверхности сильных разрывов вторых производных u_i (т.н. волны формоизменения в жестко-пластической среде).

Введем обозначения: $n^2=\frac{\Gamma}{k^*}N^2=\frac{\rho\Gamma}{\tau_s}N^2.$

Возможные значения n^2 можно получить, решив уравнение:

$$\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{vmatrix}=0, \quad (21)$$

$$c_{11}=\frac{\Gamma}{g^2}l_1;\ c_{12}=\left[1-\psi_1\left(\psi_1-\psi_2\right)l_1^2-\frac{\Gamma}{k^*}N^2\right]l_2;$$

$$c_{13}=\psi_1\left(\psi_2-\psi_3\right)l_1l_2l_3;\ c_{21}=-\frac{\Gamma}{g^2}l_2;$$

$$c_{22}=\left[1-\psi_2\left(\psi_2-\psi_1\right)l_2^2-\frac{\Gamma}{k^*}N^2\right]l_1;$$

$$c_{23}=\left[1-\psi_2\left(\psi_2-\psi_3\right)l_2^2-\frac{\mathit{\Gamma}}{k^*}N^2\right]l_3;\ \ c_{31}=\frac{\mathit{\Gamma}}{g^2}l_3;$$

$$c_{32}=\psi_3\left(\psi_2-\psi_1\right)l_1l_2l_3;\ \ c_{33}=\left[1-\psi_3\left(\psi_3-\psi_2\right)l_3^2-\frac{\mathit{\Gamma}}{k^*}N^2\right]l_2,$$

где $g=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}$; $\omega_i,\ \omega_j,\ \omega_k$ – частные производные по соответствующим координатам уравнения поверхности разрывов $\omega=\omega\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t\right)=0$; $l_i=\omega_i/g$ – направляющие косинусы нормали к поверхности разрывов; N – скорость распространения волны по нормали.

Раскрывая определитель системы (21), получим для $n^2=\mathit{\Gamma}N^2/k^*$ следующие выражения:

1) $n^2=1$; (22)

2) $n^2=1-\left[\left(\psi_1-\psi_2\right)l_1^2l_2^2+\left(\psi_2-\psi_3\right)l_2^2l_3^2+\left(\psi_3-\psi_1\right)l_3^2l_1^2\right]$. (23)

Скорости распространения волн в обрабатываемой жесткопластической среде описываются выражениями:

$$N=n\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho\mathit{\Gamma}}}. \tag{24}$$

В 1-м случае ($n^2=1$) векторная диаграмма скоростей распространения волн деформаций представляет собой сферу радиусом $\sqrt{\tau_s/(\rho\mathit{\Gamma})}$.

Отношение $\tau_s/\mathit{\Gamma}$ является секущим модулем сдвига диаграммы $T=\tau_s=const$ для рассматриваемой точки среды, определяемым интенсивностью деформаций сдвига в последней. Очевидно, что при заданном значении τ_s увеличение $\mathit{\Gamma}$ ведет к уменьшению скоростей распространения волн.

Во 2-м случае форма векторной диаграммы скоростей распространения волн зависит от вида напряженного состояния в рассматриваемой точке. Максимальное значение скорости волн имеют в направлении главных осей ($l_i=1$; $l_j=l_k=0$).

В этих направлениях векторная диаграмма N случая 2 касается сферической диаграммы случая 1. В соответствии с (20) величины ψ_i можно представить как функции одного параметра φ известными соотношениями:

$$\psi_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\varphi - \frac{\pi}{3});\quad \psi_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\varphi + \frac{\pi}{3});\quad \psi_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi. \quad (25)$$

При этом зависимость (23) запишется в виде:

$$n^2 = 1 - 4\left[l_1^2 l_2^2 \sin^2\varphi + l_2^2 l_3^2 \sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + l_3^2 l_1^2 \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right]. \quad (26)$$

(В дальнейшем изложении будем полагать, как прежде, $l_i = k_i \big/ \left|\vec{k}\right|$).

Вывод. Получено линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, описывающее пространственно-временную эволюцию медленно меняющейся комплексной амплитуды произвольной моды с точностью порядка $(\lambda / a)^n$, где λ – длина волны излучения, a – характерный поперечный размер волнового пучка, в рамках принятой гипотезы и модели узкого волнового пучка с узким угловым спектром.

ЛИТЕРАТУРА

1. Особенности распространения нелинейных волн при взаимодействии рабочих органов машин с обрабатываемыми неупругими сплошными средами. Часть **1 / [**В. С. Ловейкин, Ю. В. Човнюк, Ю. О. Ромасевич и др.**] //** Вісник аграрної науки Причорномор'я. — Миколаїв, **2008.** — Вип. №**4(47).** — С. **230—238.**

2. Рахматулин Х. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках **/** Х. А. Рахматулин, Ю. А. Демьянов. — М.: Наука, **1961.** — **350** с.

3. Гениев Г. А. Вопросы механики неупругих тел **/** Г. А. Гениев, В. С. Лейтес. — М.: Стройздат, **1981.** — **161** с.

4. Гениев Г. А. Некоторые вопросы статики сплошной среды **/** Г. А. Гениев **//** Строительная механика и расчет сооружений. — **1969.** — №**1.**

5. Ивлев Д. Д. К теории идеально-затвердевающих сред **/** Д. Д. Ивлев **//** ДАН СССР. — **1960.** — Т. **130,** №**4.**

6. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах **/** Карпман В. И. — М.: Наука, **1973.** — **320** с.

7. Ильюшин А. А. Пластичность **/** Ильюшин А. А. — М.: ОГИЗ, **1948.** — **480** с.

8. Гениев Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона **/** Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. — М.: Стройздат, **1974.** — **250** с.