

КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕОБМЕЖЕНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ПРУЖНИМ КРУГОВИМ ВІДШАРОВАНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Л.В.Вахоніна, кандидат фізико-математичних наук
Миколаївський державний аграрний університет

Представлено розв'язок задачі про взаємодію гармонічних хвиль крутіння з тонким пружним круговим включенням. Одна зі сторін включення – відшарована, а друга – повністю зчеплена з зовнішнім середовищем. Метод розв'язання полягає в тому, що кутове переміщення зовнішнього середовища за допомогою розривного розв'язку рівняння крутильних коливань виражається через невідомі переміщення і дотичні напруження на включенні. Після реалізації граничних умов на відшарованій і зчепленій сторонах включення для визначення їх стрибків отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: хвилі крутіння, пружне відшароване включення, розривний розв'язок.

Постановка проблеми. Міцність і довговічність конструкцій і деталей машин суттєво залежить від наявності в них дефектів у вигляді тонких сторонніх включень. Як відомо, найбільша концентрація напружень спостерігається поблизу відшарованих включень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Досить повно досліджено проблеми статичного деформування пружних тіл з відшарованими абсолютно жорсткими включеннями [1, 2]. Аналіз динамічної концентрації напружень поблизу відшарованих включень внаслідок деформації гармонічних хвиль теж проводився в припущенні, що включення є абсолютно жорстким [3].

Мета статті. Припущення, що включення є абсолютно жорстким, спрощує розв'язання задачі, але не дозволяє досліджувати залежність концентрації напружень поблизу включення від його пружних властивостей. І тому ми поставили за мету дослідити концентрацію напружень поблизу тонкого пружного відшарованого включення при взаємодії з ним гармонічної хвилі крутіння.

Викладення основного матеріалу. Нехай необмежене пружне тіло знаходиться в умовах осьової симетрії і містить тонке включення у вигляді круглої пластини товщини h і радіуса a . В середовищі поширюються гармонічні хвилі крутіння, які викликають в ньому наступні кутові переміщення і дотичні напруження [4].

$$u_{\theta}^0 = \frac{A_0}{\beta a} J_1(\beta r) e^{i\gamma z}; \quad \tau_{\theta z}^0 = \frac{i\gamma A}{\beta a} G_1 J_1(\beta r) e^{i\gamma z}; \quad (1)$$

$$\kappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad c_2^2 = \frac{G_1}{\rho_1}, \quad \beta = \sqrt{\kappa_2^2 - \gamma^2};$$

де G_1, ρ_1 – модуль зсуву і густина середовища; ω – частота коливань. Переміщення і напруження в середовищі подаються у вигляді

$$u_{\theta} = u_{\theta}^0 + u_{\theta}^1, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^0 + \tau_{\theta z}^1. \quad (2)$$

У формулах (2) $u_{\theta}^1, \tau_{\theta z}^1$ переміщення і напруження, що викликані хвилями, відбитими від включення.

Граничні умови, внаслідок малої товщини включення, формулюються відносно його серединної площини. Нехай сторона $z = +0$ відшарувалась, а $z = -0$ зчеплена із зовнішнім середовищем. Тоді на включенні будуть розривними кутове переміщення і дотичне напруження, для стрибків яких введено позначення:

$$\tau_{\theta z}^1(r, +0) - \tau_{\theta z}^1(r, -0) = \chi_1(r); \quad u_{\theta}^1(r, +0) - u_{\theta}^1(r, -0) = \chi_2(r), \quad r \in [0; a]. \quad (3)$$

Окрім (3), на відшарованій і зчепленій поверхнях включення мають виконуватись умови

$$\tau_{\theta z}^1(r, +0) = -\tau_{\theta z}^0(r, +0); \quad u_{\theta}^1(r, -0) = u_0(r) - u_{\theta}^0(r, 0). \quad (4)$$

В другій рівності (4) $u_0(r)$ – кутове переміщення серединної площини включення. Воно визначається з рівняння [5].

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (u_0 r) + q^2 u_0 = -\frac{\chi_1(r)}{G_0 h}, \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}, \quad c_0^2 = \frac{G_0}{\rho_0}, \quad (5)$$

де G_0, ρ_0 – модуль зсуву і густина матеріалу включення.

Оскільки включення вважається дуже тонким, то не враховується дія на його бічні кромки з боку зовнішнього середовища. Тоді до рівняння (5) додадуться такі граничні умови

$$u_0(0) = 0; S(a) = G_0 h \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_0}{r} \right) \right]_{r=a} = 0, \quad (6)$$

де $S(a)$ – дотичні сили на бічні кромки включення.

Для розв'язання сформульованої задачі переміщення u_0^1 і напруження $\tau_{\theta z}^1$ подаються у вигляді розривного розв'язка (3) зі стрибками (4) за формулами [6]:

$$\begin{aligned} u_0^1(r, z) &= \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{G_1} G_2^1(\eta, r, z) d\eta + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^a \eta \chi_2(\eta) G_2^1(\eta, r, z) d\eta, \\ \tau_{\theta z}^1(r, z) &= \frac{\partial}{\partial r} \int_0^a \eta \chi_1(\eta) G_2^1(\eta, r, z) d\eta + G_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^a \eta \chi_2(\eta) G_2^1(\eta, r, z) d\eta, \\ G_2^1(\eta, r, z) &= - \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2} |z|}}{2\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}} J_1(\lambda \eta) J_2(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

Розв'язок одновимірної граничної задачі (5), (6) визначається формулою з [7]:

$$u_0(r) = - \frac{1}{G_0 h} \int_0^a \eta \chi_1(\eta) F(\eta, r) d\eta, \quad (8)$$

де $F(\eta, r)$ – функція Гріна одновимірної задачі (5), (6), яку наведено у [7]. Формули (7), (8) будуть визначати деформовно-напружений стан у зовнішньому середовищі і включенні, якщо знайти невідомі стрибки (3). Для цього скористаємось граничними умовами (4). Після підстановки (7), (8) в (4) відносно цих стрибків одержимо систему двох рівнянь. Ця система після здійснення перетворень, детально викладених у [3, 7], набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} & g_1(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) \frac{dy}{y-\zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) \left(-\frac{2\gamma_0}{\varepsilon} \ln|y-\zeta| + V^+(y, \zeta) \right) dy + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) \left(\frac{2\gamma_0}{\varepsilon} \ln|y-\zeta| + V^-(y, \zeta) \right) dy - \\ & - \frac{1}{2} \left(g_1(0) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) \frac{dy}{y} \right) - \frac{1}{2} \left(g_2(0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) \frac{dy}{y} \right) = d^+(\zeta), \\ & g_2(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) \frac{dy}{y-\zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) \left(\frac{2\gamma_0}{\varepsilon} \ln|y-\zeta| + V^-(y, \zeta) \right) dy + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) \left(-\frac{2\gamma_0}{\varepsilon} \ln|y-\zeta| + V^+(y, \zeta) \right) dy - \\ & - \frac{1}{\pi} \left(g_1(0) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) \frac{dy}{y} \right) - \frac{1}{2} \left(g_2(0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) \frac{dy}{y} \right) = d^-(\zeta) \end{aligned} \right. \quad (9)$$

В системі (9) функції $R_1(y-\zeta)$, $R_2(y-\zeta)$, $D(y-\zeta)$, $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$, а також зв'язок між стрибками (4) і новими невідомими функціями визначаються за формулами [3, 7].

Наближений розв'язок системи (9) будується, як і розв'язок відповідної системи в [3], колокаційним методом [8]. Як доведено в [2], для того, щоб напруження поблизу включення мали інтегровану особливість, необхідно розв'язок системи (9) шукати у вигляді:

$$g_j(\zeta) = (1-\zeta)^{\alpha_j} (1+\zeta)^{-\alpha_j} \psi_j(\zeta); \quad j=1,2, \quad \alpha_1 = 0.25, \alpha_2 = -0.25. \quad (10)$$

Ці функції наближаються інтерполяційними багаточленами, які мають вигляд:

$$\psi_k(\zeta) = \sum_{m=1}^n \psi_k(y_{km}) \frac{P_n^{\alpha_k, -\alpha_k}(\zeta)}{(\zeta - y_{km}) [P_n^{\alpha_k, -\alpha_k}(y_{km})]}, \quad k=1,2, \quad (11)$$

де $P_n^{\alpha_k, -\alpha_k}(\zeta)$ – багаточлени Якобі ортогональні з відповідною вагою, y_{km} ($m=1, 2, \dots, n$) – корені цих багаточленів.

Для регулярних інтегралів скористаємося формулами Гаусса-Якобі [9], а для сингулярних окрім тих, що мають логарифмічну особливість, скористаємося формулами [10].

рифмічну особливість, квадратурними формулами з [3]. Інте-

грали з логарифмічною особливістю $Q_s(y_k) = \int_{-1}^1 q_k(y) \ln|y - y_k| dy$

обчислимо за допомогою виведених квадратурних формул:

$$Q_s(y_k) = \sum_{m=1}^n A_m^{(s)} B_{km}^{(s,l)} \Psi_s(y_{sm}), \quad B_{km}^{(s,l)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j^{\alpha_s, -\alpha_k}(y_{sm})}{(\sigma_j)^2} \lambda_j^s(y_k), \quad m, k = 1, 2, \dots, n; \quad s, l = 1, 2.$$

Внаслідок цих дій замість системи інтегральних рівнянь (9) отримуємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_1(y_{1m}) \left[A_m^{(1)} \left(-\frac{1}{y_{1m} - y_{2k}} - \frac{\gamma_0}{\varepsilon} B_{km}^{(1,2)} + \frac{1}{2} V^+(y_{1m}, y_{2k}) \right) + \frac{1}{2} b_m^{(1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_2(y_{2m}) \left[A_m^{(2)} \left(\frac{\gamma_0}{\varepsilon} B_{km}^{(2,2)} + \frac{1}{2} V^-(y_{2m}, y_{2k}) \right) - \frac{1}{2} b_m^{(2)} \right] = d^+(y_{2k}); \\ & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_1(y_{1m}) \left[A_m^{(1)} \left(\frac{\gamma_0}{\varepsilon} B_{km}^{(1,1)} + \frac{1}{2} V^-(y_{1m}, y_{1k}) \right) + \frac{1}{2} b_m^{(1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_2(y_{2m}) \left[A_m^{(2)} \left(\frac{1}{y_{2m} - y_{1k}} - \frac{\gamma_0}{\varepsilon} B_{km}^{(2,1)} + \frac{1}{2} V^+(y_{2m}, y_{1k}) \right) - \frac{1}{2} b_m^{(2)} \right] = \\ & = d^-(y_{1k}); \quad k = 1, 2, \mathbf{L}, n \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Після розв'язання системи (12) самі невідомі функції наближено знаходяться за формулами (10), (11).

Величиною, що визначає концентрацію напружень біля включення, також як і в [2, 3], вважається коефіцієнт при особливості стрибка напружень

$$N = \lim_{r \rightarrow a-0} (a-r)^{3/4} \chi_1(2).$$

Його наближене значення, після розв'язання системи (12), можна обчислити за допомогою формули

$$N = a^{3/4} G_0 N_0, \quad N_0 = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2}} \sum_{m=1}^n \Psi_2(y_{2m}) \frac{P_n^{\alpha_2, -\alpha_2}(1)}{(1-y_{2m}) [P_n^{\alpha_2, -\alpha_2}(y_{2m})]^7}. \quad (13)$$

Знайдена наближена формула (13) дала можливість чисельно дослідити залежність концентрації напружень від без-

розмірної частоти падаючої хвилі $\kappa_0 = \kappa_2 a$ і відношення модулів зсуву $\gamma_0 = G_1 / G_0$. Оскільки було встановлено, що найбільші значення N спостерігаються при співвідношенні між хвильовими сталими $\delta_0 = \gamma / \kappa_0 \approx 0,9$, то усі обчислення проводились для цього значення. Також вважалося, що $\bar{\rho} = \rho_1 / \rho_0 = 1$, $\varepsilon = 0,05$. У формулі (11) і системі (12) використовувалось до 25 вузлів інтерполяції, що забезпечило отримання результатів для розглянутого діапазону частот з похибкою до 0,1%. Результати числового дослідження наведено у вигляді графіків на рис. Графіки показують зміну абсолютного значення безрозмірного коефіцієнта при особливості напружень залежно від частоти при різних відношеннях модулів зсуву γ_0 .

Можна бачити, що зі спаданням γ_0 концентрація напружень біля включення спадає. При цьому значення коефіцієнта прямують до значення, що відповідає абсолютно жорсткому включенню і при $\gamma_0 = 0,001$ вже збігаються з ним.

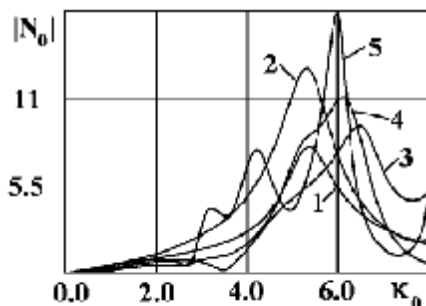


Рис. Зміна абсолютного значення безрозмірного коефіцієнта при особливості напружень залежно від частоти при різних відношеннях модулів зсуву γ_0 .

Висновки. Аналіз графіків показує, що при відшаруванні біля жорсткого включення концентрація напружень буде найбільшою. Різниця між значеннями N_0 для пружного і абсолютно жорсткого включення збільшується при зростанні частоти. Якщо включення пружне, то існують частоти, при яких коефіцієнт N_0 має максимальне значення. Таким чином,

можна зробити висновок, що при гармонічних коливаннях тіла з відшарованим включенням не завжди можливо розглядати включення як абсолютно жорстке.

ЛІТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, плоских включений и подкреплений / Попов Г. Я. — М.: Наука, 1982. — 342 с.
2. Александров В. М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. — М.: Наука, 1993. — 224 с.
3. Вахонина Л. В. Концентрация напряжений вблизи круглого тонкого абсолютно жесткого отслоившегося включения при взаимодействии с волной кручения / Вахонина Л. В., Попов В. Г. // Известия РАН. Механика деформированного твердого тела. — 2004. — №4. — С. 70—76.
4. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн / Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Червко М. А. — К.: Наукова думка, 1978.—308 с.
5. Перцев А. К. Динамика оболочек и пластин / Перцев А. К., Платонов Э. Г. — Л.: Судостроение, 1987. — 316 с.
6. Попов Г. Я. Построение разрывных решений дифференциальных уравнений теории упругости для слоистой среды с межфазными дефектами / Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 6. — С. 769—773.
7. Вахоніна Л. Крутильні коливання необмеженого пружного середовища, що містить тонке пружне кругове включення / Л. Вахоніна, В. Попов // Машинознавство. — 2001. — № 7(49). — С.13—16.
8. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. — М.: Наука, 1985. — 283 с.
9. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967. — 500 с.