УДК 624.04+539.3

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАБОЧИХ ОРГАНОВ МАШИН С ОБРАБАТЫВАЕМЫМИ НЕУПРУГИМИ СПЛОШНЫМИ СРЕДАМИ. ЧАСТЬ 1

***В.С.Ловейкин**, доктор технических наук, профессор*
***Ю.В.Човнюк**, кандидат технических наук, доцент*
***Ю.О.Ромасевич**, аспирант*
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев
***К.Н.Думенко**, кандидат технических наук, доцент*
***Г.А.Иванов**, кандидат технических наук, доцент*
Николаевский государственный аграрный университет

Досліджено просторово-часову еволюцію хвилевих пучків в анізотропних нелінійно-пружних (резонансних) середовищах, які виникають при взаємодії робочих органів будівельних машин з оброблюваним середовищем, на підставі аналізу топології поверхонь хвилевих нормалей, які відповідають можливим типам нормальних хвиль в таких середовищах (будівельні/бетонні суміші).

Постановка проблемы. Во всех реальных материалах при воздействии на них рабочих органов строительных машин с обрабатываемыми (неупругими сплошными) средами, протекают волновые процессы, причем расчет характеристик параметров этих волн составляет зачастую основу динамического расчета соответствующей конструкции строительной машины, выполненной из того или иного материала (в соответствии с эффектом Зоммерфельда существует обратное воздействие обрабатываемой среды на рабочий орган (строительной) машины). В настоящий момент методы динамического расчета конструкций строительных машин (в частности, их рабочих органов) и обрабатываемых сред, находящих в упругой стадии, хорошо разработаны и по ним имеется обширная научно-техническая и справочная литература. Значительно меньшее число исследований посвящено проблемам динамики/статики систем, работающих за пределами упругих состояний [работы Гениева Г.А., Аксентяна Г.К., Рахматулина Х.А., Прагера В.].

Вопросы распространения неупругих волн деформаций рассматриваются главным образом для одномерных задач [2], реже – для двух- и трехмерной постановки [3].

Анализ последних исследований и публикаций. Вопросы распространения неупругих волн деформаций рассматривались ранее в основном для одномерных задач – в трудах Х.А. Рахматулина и его школы (например в работе [5]). Некоторые вопросы распространения, закономерности, особенности пространственно-временной эволюции волнообразований в неупругих средах (в двух- и трехмерной постановке) изучены в [1, 3], а статические задачи для затвердевающих сред были предметом исследований авторов [3, 5]. Однако, следует заметить, цитируемые работы (по видимому, ввиду сложности нелинейных свойств моделируемых сред) посвящены, в основном, анализу скоростей распространения волн, поддерживаемых обрабатываемыми средами, либо анализу сил, напряжений, деформаций, возникающих в затвердевающих средах (для частных случаев, геометрии тел) при рассмотрении одномерных, плоских и пространственных задач статики, при оценке несущей способности систем (в т.ч. рабочих органов строительных машин) из хрупких материалов.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы, которым посвящена данная статья. Анализ условий возникновения (зарождения) волнообразований, пространственно-временной эволюции нелинейных волн/волновых пучков, их устойчивости, трансформации в нелинейные периодические волны стационарного профиля (т.н. кноидальные) либо в уединенные (солитоны), характерных для неупругих сплошных сред, имеющих как правило, нелинейные физические/геометрические свойства, обладающих дисперсией (и диссипацией), процессов самовоздействия интенсивных волновых пучков не был проведен.

Цель настоящей статьи состоит в установлении основных особенностей/закономерностей возникновения, пространственно-временной эволюции нелинейных волнообразований (нелинейных волн, нелинейных волновых пучков), возникающих при взаимодействии рабочих органов строительных машин с обрабатываемыми неупругими сплошными средами, трансформации указанных волн в волны стационарного профиля (в приближении волнового пучка), в создании адекватной физико-механической модели/уравнений рассматриваемых процессов, которая бы учитывала физическую и геометрическую нелинейности среды, дисперсию (и диссипацию) методами, развитыми в работах [7, 8].

Изложение основных результатов исследования.

Общие уравнения динамики неупругих сред.

Будем рассматривать класс сплошных сред, физические соотношения которых имеют вид [3]:

$$T = T(\Gamma,\ \theta); \qquad \sigma = \sigma(\Gamma,\ \theta), \tag{1}$$

где T – интенсивность касательных напряжений; σ – среднее напряжение; Γ – интенсивность деформаций сдвига; θ – объемная деформация.

Величины T и Γ являются соответственно вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций. Величины σ и θ – соответственно первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций. Соотношения (1) описывают, таким образом, перекрестные зависимости между инвариантами напряженного и деформированного состояния среды.

Будем также исходить из соотношений деформационной теории [6]:

$$\begin{cases} \sigma_i = \sigma(\Gamma,\ \theta) + 2\dfrac{T(\Gamma,\ \theta)}{\Gamma} e_{ii}; \\ \tau_{ij} = 2\dfrac{T(\Gamma,\ \theta)}{\Gamma} e_{ij}; \qquad (i,\ j) = \overline{(1,3)}, \end{cases} \tag{2}$$

где $e_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\theta}{3}$; $e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ – компоненты девиатора деформаций,

u_j – компоненты вектора перемещений, а остальные обозначения общепринятые.

Динамические уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial\sigma_i}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}+X_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\quad i\neq j, \tag{3}$$

где X – i-тая компонента массовой силы; ρ – плотность обрабатываемой среды.

Подставив (2) в (3) получаем:

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}+\frac{T}{3\Gamma}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\frac{2}{\Gamma}\sum_{j=1}^{3}e_{ij}\left[\frac{\partial T}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}+\left(\frac{\partial T}{\partial\Gamma}-\frac{T}{\Gamma}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial x_j}\right]+$$
$$+\frac{\partial\sigma}{\partial\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}+\frac{T}{\Gamma}\nabla^2 u_i+X_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\quad i=\overline{(1,3)}. \tag{4}$$

Выражения для производных от величины Г по координатам имеют вид:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x_j}=\frac{2}{\Gamma}\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}e_{km}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_m}. \tag{5}$$

Очевидно, что:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i};\quad \nabla^2 u_i=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \tag{6}$$

Подставляя выражения (5) и (6) в (4), получим:

$$\sum_{j=1}^{3}\left\{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}+\frac{T}{3\Gamma}\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{2}{\Gamma}e_{ij}\left[\frac{\partial T}{\partial\theta}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_k}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\Gamma}\left(\frac{\partial T}{\partial \Gamma}-\frac{T}{\Gamma}\right)\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}e_{km}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m\partial x_j}\right]+$$

$$\left.+\frac{2}{\Gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial\Gamma}\sum_{m=1}^{3}e_{jm}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_m\partial x_i}+\frac{T}{\Gamma}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right\}+X_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

$$i=\overline{(1,\ 3)}. \qquad (7)$$

Имеем систему трех квазинелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций u_i. Уравнения (7) являются общими уравнениями динамики сплошных сред при перекрестных зависимостях между инвариантами тензоров напряжений и деформаций.

Скорости распространения трехмерных волн – нестационарных поверхностей с сильным разрывов вторых производных перемещений, являются поверхностями слабых разрывов деформаций и напряжений, что можно определить, исходя из кинематических и динамических условий совместимости [3]. При этом на поверхности разрыва, уравнение которой $\omega(x_1, x_2, x_3, t)=0$, компоненты девиатора деформаций, а также величины Γ и θ (связанные с первыми производными перемещений) – непрерывны. В дальнейшем также будем полагать, что система координат (x_1, x_2, x_3) совпадает с направлениями главных осей деформаций (напряжений) в рассматриваемой точке среды. В этом случае $e_{ij}=0$.

Значения квадратов скоростей N – распространения волны по нормали к фронту определяются соотношением:

$$N^2 = \frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2}{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right)^2}. \qquad (8)$$

Направляющие косинусы l_i вектора нормали к фронту в локальной системе координат совпадают с главными осями

$$l_i^2 = \frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2}{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right)^2}. \qquad (9)$$

Значения N могут быть найдены из условия равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad (10)$$

где $b_{11} = a_{11}l_1^2 + \frac{T}{\Gamma}(l_2^2 + l_3^2) - \rho N^2;\quad b_{12} = a_{12}l_1l_2;\quad b_{13} = a_{13}l_1l_3;$

$$b_{21} = a_{21}l_2l_1;\quad b_{22} = a_{22}l_2^2 + \frac{T}{\Gamma}(l_3^2 + l_1^2) - \rho N^2;\quad b_{23} = a_{23}l_2l_3;$$

$$b_{31} = a_{31}l_3l_1;\quad b_{32} = a_{32}l_3l_2;\quad b_{33} = a_{33}l_3^2 + \frac{T}{\Gamma}(l_1^2 + l_2^2) - \rho N^2; \qquad (11)$$

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + \frac{T}{3\Gamma} + \frac{2}{\Gamma}e_{ii}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{2}{\Gamma}e_{jj}\left[\frac{2}{\Gamma}e_{ii}\left(\frac{\partial T}{\partial\Gamma} - \frac{T}{\Gamma}\right) + \frac{\partial\sigma}{\partial\Gamma}\right];$$

$$a_{ii} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + \frac{4T}{3\Gamma} + \frac{2}{\Gamma}e_{ii}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{2}{\Gamma}e_{ii}\left[\frac{2}{\Gamma}e_{ii}\left(\frac{\partial T}{\partial\Gamma} - \frac{T}{\Gamma}\right) + \frac{\partial\sigma}{\partial\Gamma}\right].$$

На основании (11) можно заключить, что $a_{ij} \neq a_{ji}$. Здесь и в дальнейшем полагаем $l_i = k_i / |\vec{k}|$, где $\vec{k} = (k_1,\ k_2, k_3)$ – волновой вектор, $i = \overline{(1,\ 3)}$. В общем случае (при $l_1 \neq 0,\ l_2 \neq 0,\ l_3 \neq 0$) кубическое уравнение (10) относительно N^2 определяет три независимые скорости распространения волн.

Исследования, проведенные в [3] относительно характера разрывов, показывают, что, в отличие от идеально-упругой среды, чисто продольные и чисто поперечные волны имеют место только при совпадении нормали к фронту волны с одним из главных направлений.

Так, при $l_i = 1\ (l_j = l_k = 0)$ имеем:

$$\left(a_{ii} - \rho N^2\right)\left(\frac{T}{\Gamma} - \rho N^2\right)^2 = 0, \tag{12}$$

откуда: $$N_1 = \sqrt{\frac{a_{ii}}{\rho}}; \quad N_2 = N_3 = \sqrt{\frac{T}{\rho \Gamma}}, \tag{13}$$

где N_1 – скорость распространения продольных волн; $N_{2,3}$ – поперечных волн.

В случае деформации значения N определяются на основании (10), (11) из выражения:

$$\begin{aligned} 2\rho N^2 = {} & \left(a_{11} + \frac{T}{\Gamma}\right)\cos^2\alpha + \left(a_{22} + \frac{T}{\Gamma}\right)\sin^2\alpha \pm \\ & \pm \left\{\left[\left(a_{11} - \frac{T}{\Gamma}\right)\cos^2\alpha - \left(a_{22} - \frac{T}{\Gamma}\right)\sin^2\alpha\right]^2 + \right. \\ & \left. + 4a_{12}a_{21}\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{14}$$

где α – угол между нормалью к фронту и направлением главного нормального напряжения σ_1, т.е.:

$$\cos\alpha = \left(\frac{\vec{k}_i}{|\vec{k}|} \cdot \vec{i}_{\sigma_1} \right), \tag{15}$$

где $\vec{i}_{\sigma_1}$ – орт вдоль направления главного нормального напряжения σ_1. Значения N, соответствующие значениям $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, являются экстремальными. Исследование (14), проведенное в [3], показывает, что могут существовать и промежуточные экстремумы $N(\alpha_2)$ и $N(\alpha_2)$, определяемые выражениями:

$$\begin{cases} \rho N^2(\alpha_1) = \dfrac{a_{11}a_{22} - \left(\sqrt{a_{12}a_{21}} + \dfrac{T}{\Gamma}\right)^2}{\left(a_{11} + a_{22} - 2\dfrac{T}{\Gamma}\right) - 2\sqrt{a_{12}a_{21}}}; \\ \rho N^2(\alpha_2) = \dfrac{a_{11}a_{22} - \left(\sqrt{a_{12}a_{21}} - \dfrac{T}{\Gamma}\right)^2}{\left(a_{11} + a_{22} - 2\dfrac{T}{\Gamma}\right) + 2\sqrt{a_{12}a_{21}}}, \end{cases} \tag{16}$$

причем:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha_1 = \dfrac{\left(a_{22} - \dfrac{T}{\Gamma}\right) - \sqrt{a_{12}a_{21}}}{\left(a_{11} + a_{22} - 2\dfrac{T}{\Gamma}\right) - 2\sqrt{a_{12}a_{21}}}; \\ \cos^2\alpha_2 = \dfrac{\left(a_{22} - \dfrac{T}{\Gamma}\right) + \sqrt{a_{12}a_{21}}}{\left(a_{11} + a_{22} - 2\dfrac{T}{\Gamma}\right) + 2\sqrt{a_{12}a_{21}}}. \end{cases} \tag{17}$$

Вывод. На основе анализа топологии поверхностей волновых нормалей получены основные закономерности распространения волновых пучков в нелинейных неупругих (резонансных) средах, обрабатываемых вибрационным полем и возникающих вследствии взаимодействия их с рабочими органами строительных машин. Выявлено их соответствие возможным типам нормальных волн в таких средах как: строительные бетонные смеси на заключительной стадии виброударного формирования и уплотнения в рамках модели квазитвердой среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гениев Г.А. О некоторых закономерностях распространения трехмерных волн деформаций в неупругих средах и средах с внутренним трением / Гениев Г.А. // Известия АН СССР. Серия: Механика твердого тела. — 1975. — №1.
2. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках / Х.А. Рахматулин, Ю.А. Демьянов. — М.: Наука, 1961. — 350 с.
3. Гениев Г.А., Вопросы механики неупругих тел / Г.А. Гениев, В.С. Лейтес. — М.: Строиздат, 1981. — 161 с.
4. Гениев Г.А. Некоторые вопросы статики сплошной среды / Гениев Г.А. // Строительная механика и расчет сооружений.— 1969. — №1.
5. Ивлев Д.Д. К теории идеально-затвердевающих сред / Ивлев Д.Д. // ДАН СССР. — 1960. — Т.130. — №4.
6. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики / Лукаш П.А. — М., 1978. — 250 с.
7. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / Карпман В.И. — М.: Наука, 1973. — 320 с.