УДК 534.122

ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

***О.В.Шептилевський**, асистент*
Миколаївський державний аграрний університет

В роботі досліджено власні коливання сферичної оболонки, яка заповнена рідиною. Досліджено вплив параметрів моделі на період і частоту власних коливань оболонки.

Вступ. При дослідженні різноманітних процесів, які відбуваються в рідині, що містить пузири газу, одним з основних засобів є математичне моделювання. В роботі [1] побудовано модель сферичної оболонки, заповненої рідиною, яка містить газовий пузир. При дослідженні параметрів моделі, зокрема тиску в рідині, виявилось, що він змінюється періодично, і, крім основної частоти коливань, вплив має і частота власних коливань оболонки. В роботі не розглянуто питання зв'язку частоти власних коливань оболонки та значень змінних моделі, що розглядається.

Мета. Метою даної роботи є дослідження власних коливань сферичної оболонки заданої товщини без врахування хвильових явищ в рідині, що заповнює оболонку. В роботі розглянуто вплив параметрів моделі на частоту власних коливань оболонки.

Постановка задачі. Для побудови математичної моделі скористаємося рівнянням, що описує динаміку сферичної оболонки [2]:

$$\rho\cdot\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}=\frac{1}{R_c+\frac{\delta}{2}}\cdot\left[P_1+P_2-2\cdot E\cdot\frac{\overline{U}}{R_c+\frac{\delta}{2}}\right]-\frac{1}{\delta}\left(P_1-P_2\right),\quad(1)$$

де U – радіальне переміщення оболонки,
ρ – густина матеріалу,
R_c – радіус оболонки,
δ – товщина оболонки,
E – модуль Юнга,
P_1 – зовнішній тиск,

P_2 – тиск в рідині, що заповнює оболонку,

R – радіус пузиря, розташованого в рідині.

Звели дане рівняння до рівняння з безрозмірними змінними, взявши в якості основних масштабів наступні змінні: T_0 – період власних коливань пузира, R_{n_0} – початковий радіус пузира, P_0 – початковий тиск системи, ρ_0 – початкова густина рідини. Виконаємо наступні заміни $U = R_{p_0}\tilde{U}$, $\delta = R_{p_0}\tilde{\delta}$, $R_s = R_{p_0}\tilde{R}_s$, $t = T_0\tilde{t}$, $P_1 = P_0\tilde{P}_1$, $P_2 = P_0\tilde{P}_2$, $E = P_0\tilde{E}$, $\rho_g = \rho_0\tilde{\rho}_g$, $\rho_s = \rho_0\tilde{\rho}_s$. Підставивши в рівняння (1), отримаємо:

$$\tilde{\rho}_s \frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial\tilde{t}^2} = Par1\left(\frac{1}{\tilde{R}_s + \tilde{U} + \frac{\tilde{\delta}}{2}}\left[\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 - \frac{2\tilde{E}\tilde{U}}{\tilde{R}_s + \tilde{U} + \frac{\tilde{\delta}}{2}}\right] - \frac{1}{\tilde{\delta}}\left(\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2\right)\right) \quad (2),$$

де $Par1 = \dfrac{T_0^2 P_0}{\rho_0 R_0^2}$ (3)

враховуючи, що $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ та $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{3\gamma P_0}{\rho_g R_{p_0}^2}}$ [3], отримаємо

$$Par1 = \frac{4\pi^2}{3\gamma}.$$

Зведемо дане диференціальне рівняння другого порядку до системи двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{U}} = \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} = \dfrac{Par1}{\tilde{\rho}_s}\left(\dfrac{1}{\tilde{R}_s + \tilde{U} + \frac{\tilde{\delta}}{2}}\left[\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 - \dfrac{2\tilde{E}\tilde{U}}{\tilde{R}_s + \tilde{U} + \frac{\tilde{\delta}}{2}}\right] - \dfrac{1}{\tilde{\delta}}\left(\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2\right)\right) \end{cases} \quad (4)$$

Для розв'язання одержаної системи використаємо метод Рунге-Кутта. При дослідженні побудованої моделі в якості рідини, що заповнює сферичний об'єм, використовуємо воду. Тоді показник адіабати прийме значення $\gamma = 1{,}4$, в свою чергу $Par1 = 9{,}4$.

Результати розрахунків. Задамо наступні початкові умови $Par1 = 9{,}4$, $\tilde{P}_1 = 1$, $\tilde{E} = 2200$, $\tilde{\rho} = 7{,}8$, $\tilde{\delta} = 1$, $R_s = 10$, $\tilde{x} = 0$ і отримаємо залежність переміщення оболонки від часу (рис.1).

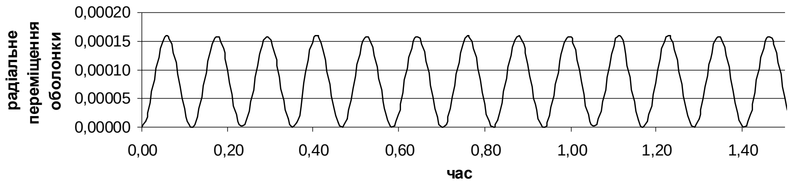

Рис.1. Залежність радіального переміщення оболонки від часу

При дослідженні даної моделі при різній товщині оболонки спостерігається закономірність, за якої зі збільшенням оболонки збільшується її середнє значення радіального переміщення (рис.2). Залежність періоду та частоти від товщини оболонки представлено на рисунках 3 та 4.

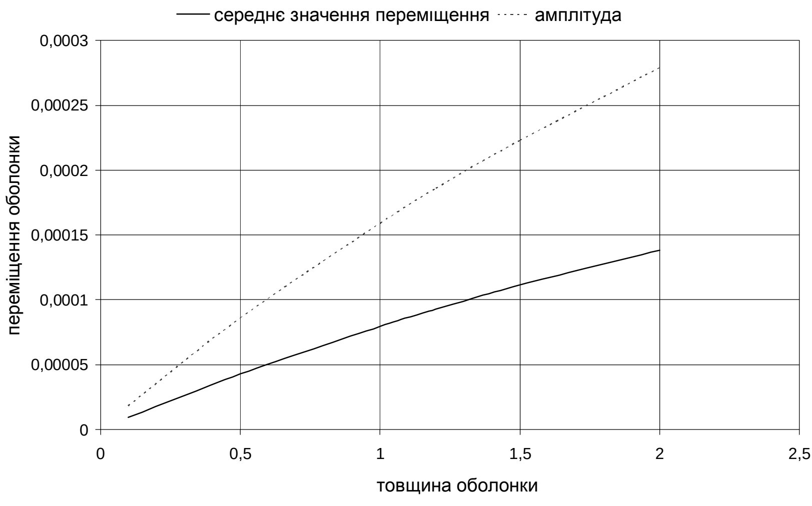

Рис.2. Залежність переміщення від товщини

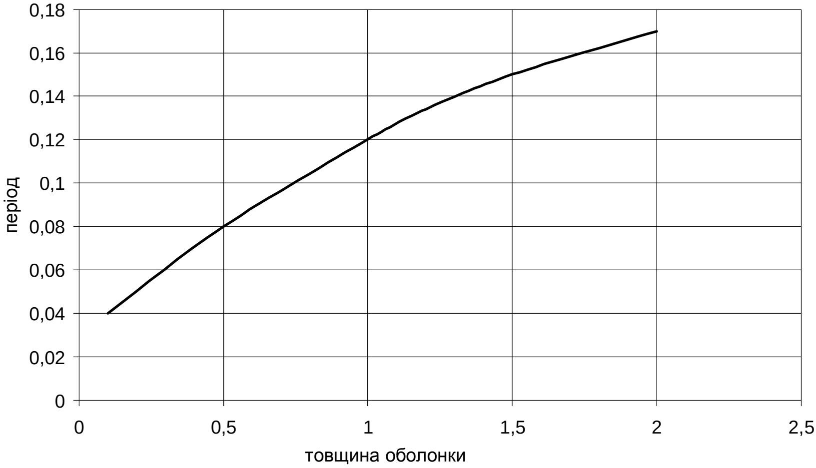

Рис.3. Залежність періоду від товщини

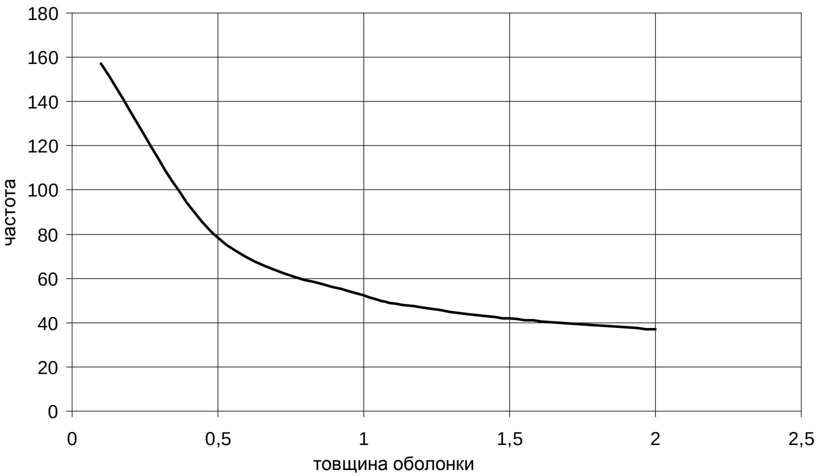

Рис.4. Залежність частоти від товщини оболонки

Висновки. Таким чином, в роботі показано, що при збільшенні відносної товщини оболонки збільшується амплітуда її радіального переміщення, що впливає на амплітудо-частотні характеристики параметрів моделі і потребує врахування при дослідженні подібних моделей. При збільшені товщини оболонки період коливань збільшується, а частота відповідно зменшується.

ЛІТЕРАТУРА

1. Косенков В.М., Шептилевский А.В. Динамика газового пузырька в жидкости, ограниченной сферической оболочкой, при изменении внешнего давления.// Матеріали міжвузівської науково-практичної конференції "Науковий потенціал вищої школи". – Миколаїв, 2007.
2. Можаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле. – К.: Вища школа, 1991.
3. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. – М.: Энергоатомиздат, 1990.