

УДК 621.05

ВИЗНАЧЕННЯ РІВНЯННЯ ЦЕНТРОЇД ЗА ЗАДАНИМ НАПЕРЕД ЗАКОНОМ РУХУ

В.П. Табацков, кандидат технічних наук, доцент

А.П. Бойко, асистент

Миколаївський державний аграрний університет

*Дана робота присвячена питанню визначення рівнянь центр-
їд, якщо заданий закон руху площини. Рішення цієї задачі до-
зволяє створювати конфігурації зубчатих некруглих коліс, які при
коченні один по одному повторюють закон руху площини.*

Настоящая работа посвящена вопросу определения уравнений центра тяжести, если задан закон движения плоскости. Решение этой задачи позволяет создавать конфигурации зубчатых некрутящихся колес, которые при качении друг по другу повторяют закон движения плоскости.

Визначимо рух площини так, щоб відрізок MN , жорстко пов'язаний з рухливою площиною своїми кінцями, ковзав по наперед заданих кривих v і v_1 нерухомої системи XOY (рис.1).

Рівняння кривих v і v_1 запишемо в полярній формі щодо полюса O , а напрям полярної осі сумістимо з віссю OX нерухомої системи. Початок рухомої системи $\xi M\eta$ помістимо в т. M , а вісь $M\xi$ направимо по радіусу – вектору OM .

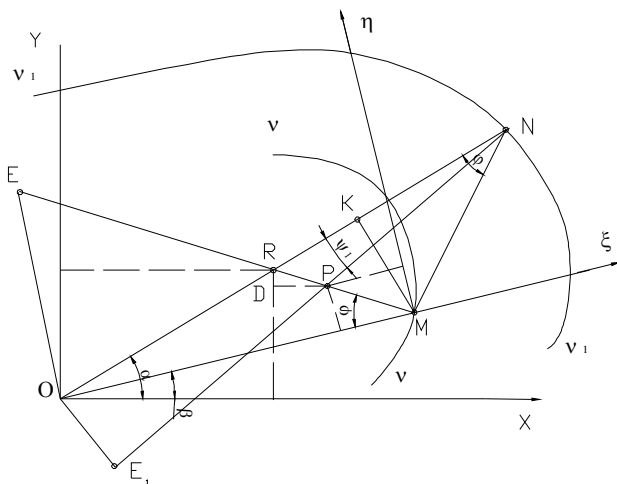


Рис.1.

Відома теорема кінематичної геометрії визначає миттєвий центр обертання P на перетині нормалей [1,2], проведених з точок M і N . Якщо тепер ми запишемо координати миттєвого центру обертання щодо нерухомої і рухомої системи координат, то тим

самим визначимо нерухому і рухому центроїди, перекочуванням яких можна замінити рух відрізка MN відносно нерухомої системи XOY .

Рівняння допоміжних траєкторій виразимо рівняннями:

$$\rho = v(\beta), \text{ а } \rho_1 = v_1(\alpha).$$

З рисунку 1 витікає, що $ON = \rho_1, OM = \rho, MN = l$, а $\alpha = \beta + \gamma$. Нехай $OR = r_1$, а $RN = r_2 = \rho_1 - r_1$.

Визначаючи KM з $\triangle OMN$, отримаємо:

$$KM^2 = \rho^2 - (\rho_1 - KN)^2 \text{ або } KM^2 = l^2 - KN^2.$$

Прирівнюємо і визначаємо KN :

$$KN = \frac{l^2 + \rho_1^2 - \rho^2}{2\rho_1}.$$

Далі знаходимо кут γ і φ з $\triangle OKM$ і $\triangle NKM$:

$$\gamma = \arccos \frac{\rho_1^2 + \rho^2 - l^2}{2\rho_1\rho},$$

$$\varphi = \arccos \frac{l^2 + \rho_1^2 - \rho^2}{2\rho_1 l}.$$

Враховуючи той факт, що $OE = \rho'$, а $OE_1 = \rho'_1$, визначаємо кути ψ і ψ_1 :

$$\psi = \arctg \frac{\rho_1}{\rho}, \text{ а } \psi_1 = \arctg \frac{\rho'_1}{\rho_1}.$$

За теоремою синусів з $\triangle ORM$ визначаємо r_1 , а із $\triangle NPM$ знаходимо PM :

$$r_1 = \frac{\rho \cdot \sin \psi}{\sin(\gamma + \psi)}, \quad \rho M = \frac{l \cdot \sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\psi + \psi_1 + \gamma)}.$$

Записуючи координати миттєвого центру обертання P відносно рухомої системи координат $\xi M \eta$, ми отримуємо рівняння рухомої центроїди у вигляді:

$$\eta = l \cdot \frac{\sin \psi \cdot \sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\psi + \psi_1 + \gamma)},$$

$$\xi = l \cdot \frac{\cos \psi \cdot \sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\psi + \psi_1 + \gamma)}.$$

За теоремою синусів з ΔROM визначимо RM :

$$RM = \frac{\rho \cdot \sin \gamma}{\sin(\gamma + \varphi)}.$$

Розглянемо ΔRDP , з якого

$$RP = \rho \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \psi)} - l \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\psi + \psi_1 + \gamma)},$$

$$\angle RPD = \psi - \beta.$$

Звідси визначаємо RD і DP :

$$RD = \sin(\psi - \beta) \left[\rho \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \psi)} - l \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\gamma + \psi_1 + \psi)} \right],$$

$$DP = \cos(\psi - \beta) \left[\rho \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \psi)} - l \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\gamma + \psi_1 + \psi)} \right].$$

Координати точки мають вигляд:

$$X_R = \frac{\rho \cdot \sin \psi}{\sin(\gamma + \psi)} \cdot \cos(\beta + \gamma),$$

$$Y_R = \frac{\rho \cdot \sin \psi}{\sin(\gamma + \psi)} \cdot \sin(\beta + \gamma).$$

Визначаючи координати миттєвого центру обертання P щодо нерухомої системи координат XOY , прийдемо до рівняння вигляду:

$$X_P = X_R + DP = \frac{\rho}{\sin(\gamma + \psi)} [\cos(\beta + \gamma) \sin \psi + \sin \gamma \cdot \cos(\psi - \beta)] - l \cdot \cos(\psi - \beta) \frac{\sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\gamma + \psi_1 + \psi)},$$

$$Y_P = Y_R - RD = \frac{\rho}{\sin(\gamma + \psi)} [\sin \psi \cdot \sin(\beta + \gamma) - \sin \gamma \cdot \sin(\psi - \beta)] + l \cdot \sin(\psi - \beta) \frac{\sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\gamma + \psi_1 + \psi)}.$$

У випадку, якщо кут $\psi_1 = 0$, то нормаль кривої співпадає з радіусом-вектором цієї кривої, а сама крива уявляє собою коло ($\rho_1 = R$).

Таким чином, знаючи наперед задані траєкторії нерухомої площини і довжину стрижня, жорстко пов'язаного з рухомою площиною, що ковзає своїми кінцями по кривих, ми можемо теоретично повторити ці траєкторії точками рухомої центроїди, що котиться по нерухомій центроїді.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. -М.: Физматгиз, 1959.
2. Геронимус Я.Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов. -М.: Физматгиз, 1962.
3. Табацков В.П., Бергер Э.Г. Синтез направляющих механизмов в машиностроении и робототехнике.- Николаев: Издательский отдел НГАУ, 2004.