УДК 621.05

ВИЗНАЧЕННЯ РІВНЯННЯ ЦЕНТРОЇД ПО ЗАДАНОМУ НАПЕРЕД ЗАКОНУ РУХУ

В.П.Табацков, *кандидат технічних наук, доцент*

А.П.Бойко, *асистент*

Миколаївський державний аграрний університет

Дана робота присвячена питанню визначення рівнянь центроїд, якщо задано закон руху площини. Рішення цієї задачі дозволяє створювати конфігурації зубчатих некруглих коліс, які при коченні одне по одному повторюють закон руху площини.

Настоящая работа посвящена вопросу определения уравнений центроид, если задан закон движения плоскости. Решение этой задачи позволяет создавать конфигурации зубчатых некруглых колес, которые при качении друг по другу повторяют закон движения плоскости.

Визначимо рух площини так, щоб відрізок **MN**, жорстко пов'язаний з рухливою площиною своїми кінцями, ковзав по наперед заданих кривих ν і ν_1 нерухомої системи **XOY** (рис.1).

Рівняння кривих ν і ν_1 запишемо в полярній формі щодо полюса **O**, а напрям полярної осі сумістимо з віссю **OX** нерухомої системи. Початок рухомої системи ξ**M**η помістимо в т.**M**, а вісь $M\xi$ направимо по радіусу – вектору **OM**.

Відома теорема кінематичної геометрії визначає миттєвий центр обертання **P** на перетині нормалей [1, 2] проведених з точок **M** і **N**. Якщо тепер ми запишемо координати миттєвого центру обертання щодо нерухомої і рухомої системи координат, то тим самим визначимо нерухому і рухому центроїди, перекочуванням яких можна замінити рух відрізка **MN** відносно нерухомої системи **XOY**.

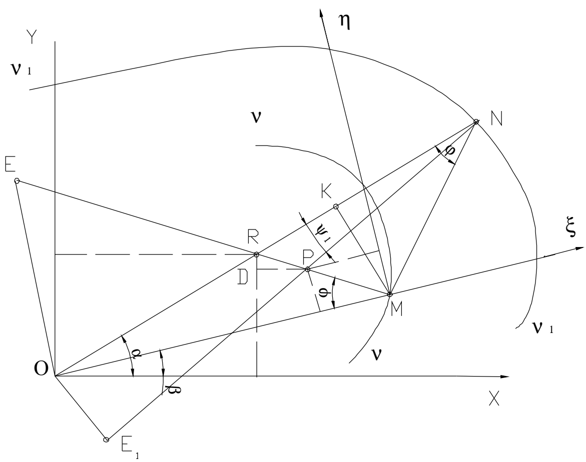

Рис.1.

Рівняння допоміжних траєкторій виразимо рівняннями:

$\rho = \nu(\beta)$, а $\rho_1 = \nu_1(\alpha)$.

З рисунку 1 витікає, що **ON** $= \rho_1$, **OM** $= \rho$, $MN = l$, а $\alpha = \beta + \gamma$.

Нехай, **OR** $= r_1$, а **RN** $= r_2 = \rho_1 - r_1$.

Визначаючи **KM** з Δ**OMN**, отримаємо:

$$\mathbf{KM}^2 = \rho^2 - \left(\rho_1 - \mathbf{KN}\right)^2 \text{ або } \mathbf{KM}^2 = \mathbf{l}^2 - \mathbf{KN}^2.$$

Прирівнюємо і визначаємо **KN**:

$$\mathbf{KN} = \frac{\mathbf{l}^2 + \rho_1^2 - \rho^2}{2\rho_1}.$$

Далі знаходимо кут γ і φ з $\Delta\mathbf{OKM}$ і $\Delta\mathbf{NKM}$:

$$\gamma = \mathbf{arccos}\frac{\rho_1^2 + \rho^2 - \mathbf{l}^2}{2\rho_1\rho},$$

$$\varphi = \mathbf{arccos}\frac{\mathbf{l}^2 + \rho_1^2 - \rho^2}{2\rho_1\mathbf{l}}.$$

Враховуючи той факт, що $\mathbf{OE} = \rho'$, а $\mathbf{OE}_1 = \rho_1'$ визначаємо кути ψ_1 і ψ:

$$\psi = \mathbf{arctg}\frac{\rho_1}{\rho}, \text{ а } \psi_1 = \mathbf{arctg}\frac{\rho_1'}{\rho_1}.$$

За теоремою синусів, з $\Delta\mathbf{ORM}$ визначаємо r_1, а із $\Delta\mathbf{NPM}$ знаходимо **PM**:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\rho \cdot \sin\psi}{\sin(\gamma + \psi)}, \quad \mathbf{PM} = \frac{\mathbf{l} \cdot \sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\psi + \psi_1 + \gamma)}.$$

Записуючи координати миттєвого центру обертання **P** відносно рухомої системи координат $\xi\mathbf{M}\eta$, ми отримаємо рівняння рухомої центроїди у вигляді:

$$\eta = \mathbf{l} \cdot \frac{\sin\psi \cdot \sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\psi + \psi_1 + \gamma)},$$

$$\xi = \mathbf{l} \cdot \frac{\cos\psi \cdot \sin(\varphi - \psi_1)}{\sin(\psi + \psi_1 + \gamma)}.$$

За теоремою синусів, з $\Delta\mathbf{ROM}$ визначимо $\mathbf{RM}$:

$$\mathbf{RM} = \frac{\rho \cdot \sin\gamma}{\sin(\gamma+\varphi)}.$$

Розглянемо $\Delta\mathbf{RDP}$, з якого

$$\mathbf{RP} = \rho \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\psi)} - \mathbf{l} \cdot \frac{\sin(\varphi-\psi_1)}{\sin(\psi+\psi_1+\gamma)}, \quad \angle\mathbf{RPD} = \psi-\beta.$$

Звідси визначаємо $\mathbf{RD}$ і $\mathbf{DP}$:

$$\mathbf{RD} = \sin(\psi-\beta)\left[\rho \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\psi)} - \mathbf{l} \cdot \frac{\sin(\varphi-\psi_1)}{\sin(\gamma+\psi_1+\psi)}\right],$$

$$\mathbf{DP} = \cos(\psi-\beta)\left[\rho \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\psi)} - \mathbf{l} \cdot \frac{\sin(\varphi-\psi_1)}{\sin(\gamma+\psi_1+\psi)}\right].$$

Координати точки мають вигляд:

$$\mathbf{X_R} = \frac{\rho \cdot \sin\psi}{\sin(\gamma+\psi)} \cdot \cos(\beta+\gamma),$$

$$\mathbf{Y_R} = \frac{\rho \cdot \sin\psi}{\sin(\gamma+\psi)} \cdot \sin(\beta+\gamma).$$

Визначаючи координати миттєвого центру обертання $\mathbf{P}$ щодо нерухомої системи координат $\mathbf{XOY}$, прийдемо до рівняння вигляду:

$$\mathbf{X_P} = \mathbf{X_R} + \mathbf{DP} = \frac{\rho}{\sin(\gamma+\psi)} *$$

$$* \left[\cos(\beta+\gamma)\sin\psi + \sin\gamma \cdot \cos(\psi-\beta)\right] -$$

$$-\mathbf{l} \cdot \cos(\psi-\beta)\frac{\sin(\varphi-\psi_1)}{\sin(\gamma+\psi_1+\psi)},$$

$$\mathbf{Y_P = Y_R - RD = \frac{\rho}{\sin(\gamma+\psi)} *}$$
$$\mathbf{* [\sin\psi \cdot \sin(\beta+\gamma) - \sin\gamma \cdot \sin(\psi-\beta)] +}$$
$$\mathbf{+ l \cdot \sin(\psi-\beta) \frac{\sin(\varphi-\psi_1)}{\sin(\gamma+\psi_1+\psi)}.}$$

У випадку, якщо кут $\psi_1 = 0$, то нормаль кривої співпадає з радіусом-вектором цієї кривої, а сама крива уявляє собою коло.

Таким чином, знаючи наперед задані траєкторії нерухомої площини і довжину стрижня, жорстко пов'язаного з рухомою площиною, що ковзає своїми кінцями по кривих, ми можемо теоретично повторити ці траєкторії точками рухомої центроїди, що котиться по нерухомій центроїді.

ЛІТЕРАТУРА

1.Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. -М.: Физматгиз,1959.

2.Геронимус Я.Л. Геометрический аппарат теории синтезу плоских механизмов. -М.: Физматгиз, 1962.

3.Табацков В.П., Бергер Э.Г. Синтез направляющих механизмов в машиностроении и робототехнике.- Николаев: Издательский отдел НГАУ, 2004.