УДК 519.8 (075.8)

А. В. Калініченко, В. М. Сакало, кандидати технічних наук
Т. А. Шарун, Ю. В. Шмиголь

Полтавська державна аграрна академія

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ ЕФЕКТИВНИХ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ У АГРАРНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Представлені особливості використання математичного апарату теорії ігор в аграрному виробництві, що дає можливість суттєво зменшити рівень невизначеності при прийнятті управлінських рішень з метою забезпечення цілеспрямованих дій у рослинництві та тваринництві за різних (не передбачуваних) природних умов із урахуванням екологічного та економічного факторів виробництва.

Ключові слова: *теорія ігор, математичний апарат, гравець, платіж, ситуація, функція виграшу, стратегія, прибуток.*

Теорія ігор – це математична теорія конфліктних ситуацій. Вона займається вивченням ситуацій, пов'язаних із прийняттям рішень, в яких дві різні конкуруючі сторони мають конфліктуючі цілі [3, 6]. Однією із характерних і суттєвих рис громадського, соціально-економічного процесу є розмаїття та різноплановість інтересів і наявність сторін, які є носіями таких інтересів. Класичними прикладами є ринкові відносини: продавець-покупець, кілька конкуруючих виробників товару і т.п. Конфлікт може виникнути також через розбіжності цілей, які віддзеркалюють не лише несумісні інтереси різних осіб або сторін, а також різноманітні інтереси однієї і тієї ж особи. Наприклад, планування економічної політики на певний період вимагає узгодження протилежних і несумісних вимог: зростання обсягів виробництва, збільшення прибутків, покращання екології і т. ін. [1, 5]. Протидія зацікавленій стороні може бути не лише наслідком усвідомлених дій, а й результатом об'єктивно існуючих, але непередбачених в повному обсязі умов, наприклад, цілеспрямованих дій по одержанню високого врожаю, за природних умов, які не завжди цьому сприяють. Багато таких ситуацій можна зустріти в різних сферах діяльності: економіці, сільськогосподарському виробництві, біології, соціології, екології та ін. [6]. Моделювання таких ситуацій прийнято називати «*гра з природою*».

Характерною особливістю відповідних моделей є розробка математичного апарату з прийняття рішень в умовах так званої *природної невизначеності*.

Мета досліджень. Метою нашого дослідження було вивчення особливостей використання математичного апарату теорії ігор при прийнятті рішень у аграрному виробництві з урахуванням екологічного та економічного критеріїв.

Методологія досліджень. Супротивників, які беруть участь у ігровій ситуації називають *гравцями*. Кожен з них має певну множину (*скінчену* чи *нескінчену*) можливих виборів, які називають *стратегіями*. З кожною парою стратегій пов'язаний *платіж*, який один з гравців виплачує іншому.

Множину гравців позначимо *I*. Процес гри складається з вибору кожним гравцем $k=\overline{1,2}$ своєї стратегії s_k з сукупності стратегій *S*. Вектор $\vec{s}=(s_{1i},s_{2j})$, що визначає сукупність стратегій, що обрані кожним з гравців в певний момент гри називається *ситуацією*. В результаті ситуації, яка утворилася після вибору певної стратегії, гравець *k* отримує (виплачує) платіж $H_k(s)$.

Закон відповідності між набором можливих ситуацій певної гри та виграшем конкретного гравця називається *функцією виграшу* або *функцією платежів*.

Оскільки ігри беруть свій початок з конфлікту інтересів, то оптимальним розв'язком гри є одна чи кілька таких стратегій для кожного з гравців, що будь-яке відхилення від цих стратегій не покращую ситуацію жодного з гравців. Таку ситуацію називають *ситуацією рівноваги*. Пошук ситуації рівноваги і є *розв'язком гри*.

Цей розв'язок може бути у вигляді єдиної *чистої* стратегії або кількох стратегій, які є *змішаними* у відповідності до заданих ймовірностей.

Результати досліджень. Задачею кожного з гравців є максимізація свого виграшу. Максимізація виграшу першого гравця еквівалентна мінімізації виграшу другого і навпаки – максимізація виграшу другого гравця еквівалентна мінімізації виграшу першого.

Якщо перший гравець має *m* чистих стратегій, а другий *n*, то парна гра з нульовою сумою формально описується системою чисел – матрицею $\left\|a_{ij}\right\|_{m+n}$, елементи якої визначають виграш першого гравця (і відповідно програш другого). Матрицю $\left\|a_{ij}\right\|$ називають *платіжною матрицею* або матрицею гри, в якій *i*-тий рядок – це *i*-та стратегія першого гравця, а *j*-тий стовпчик – це *j*-та стратегія другого гравця.

Гарантований виграш першого гравця, який застосовує чисту *i*-ту стратегію, визначається так:

$$\alpha_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \qquad (1)$$

Число $\underline{V} = \max_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\}$ називається *нижнім значенням гри,* а чиста стратегія i_0 – при якій досягається $\underline{V}$, називається ***максимінною*** стратегією. Аналогічно число $\overline{V} = \min_{1 \le j \le n} \beta_j = \min_{1 \le j \le n} \left\{ \max_{1 \le i \le m} a_{ij} \right\}$ називається верхнім значенням гри, а j_0 при якій досягається – ***мінімаксною*** стратегією другого гравця.

Завжди має місце $\underline{V} \le \overline{V}$. Якщо $\underline{V} = \overline{V} = V$, то гра має **сідлову** точку в чистих стратегіях, а число V називається *значенням гри* (або *ціною гри*). Гра має сідлову точку в чистих стратегіях тоді і тільки тоді, коли існує елемент матриці $a_{i_0 j_0}$, який є мінімальним в своєму рядкові і в той же час максимальний в стовпчику, тобто

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j} \qquad (2)$$

Будь-яка пара (i_0, j_0), що відповідає (2), називається *сідловою* точкою.

Приклад 1. Дві агрофірми *A* і *B* займаються вирощуванням та заготівлею лікарських рослин. Агрофірма *A* рекламує продукцію на радіо (A_1), телебаченні (A_2) та в газетах (A_3). Агрофірма *B* разом із використанням радіо (B_1), телебачення (B_2) та газет (B_3), розсилає поштою рекламні брошури (B_4). В залежності від якості та інтенсивності проведення рекламної компанії, кожна з агрофірм може залучити до себе частину клієнтів конкуруючого підприємства. Наведена нижче матриця характеризує процент клієнтів, залучених або втрачених агрофірмою *A*.

Стратегії рекламної компанії	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	–2	9	–3
A_2	6	5	6	8
A_3	–2	4	–9	5

Розв'язання. Розв'язання задачі пов'язане із необхідністю вибору *найкращого результату із найгірших* для кожного з гравців.

Стратегії рекламної компанії	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i(min)
A_1	8	–2	9	–3	–3
A_2	6	5	6	8	5
A_3	–2	4	–9	5	–9
β_j(max)	8	5	9	8	$\underline{V} = \bar{V} = V = 5$

максимін

ціна гри

мінімакс

Якщо фірма A обере стратегію A_1, то незалежно від дій фірми B, найгіршим результатом буде – втрата фірмою A до 3% ринку на користь фірми B. Це визначається мінімумом елементів першого рядка матриці платежів. Аналогічно, при виборі стратегії A_2 найгіршим варіантом для фірми A буде збільшення ринку на 5% за рахунок фірми B. Відповідно, найгіршою ситуацією при виборі стратегії A_3 є втрата 9% ринку на користь фірми B. Ці результати знаходяться у стовпчику α_i(min). Для досягнення найкращого результату з найгірших, фірма A обирає стратегію A_2, так як вона відповідає найбільшому значенню цього стовпчика.

Розглянемо стратегії фірми B. Так як елементи матриці відповідають платежам фірми A, то критерій найкращого з найгірших результатів для фірми B відповідає вибору мінімаксного значення β_j(max). *Висновок* – фірма B обирає стратегію B_2.

Оптимальним розв'язком є вибір стратегій A_2 і B_2, тобто обом фірмам слід проводити рекламу на телебаченні. При цьому виграш буде на користь фірми A, її сегмент ринку збільшиться на 5%. Тобто ціна гри дорівнює 5, задача має розв'язок у чистих стратегіях, тобто має сідлову точку. Розв'язок, що відповідає сідловій точці, гарантує, що фірмам нема сенсу обирати іншу стратегію.

Дійсно, якщо фірма B перейде до іншої стратегії (B_1, B_3 чи B_4, то фірма A може дотримуватися стратегії A_2, що призведе до збільшення втраченого фірмою B сегменту ринку (6% або 8%). Через ті ж причини, фірмі A нема сенсу використовувати іншу стратегію, бо якщо вона застосує, наприклад, стратегію A_3, то фірма B може використати стратегію B_3 і збільшить свій ринок на 9%. Аналогічний висновок має місце для випадку, коли фірма A буде застосовувати стратегію A_1.

У реальному житті ситуації, що виникають, дуже рідко мають розв'язок у чистих стратегіях, так у наведеному прикладі ситуація, в якій дійсно слід використовувати лише один вид реклами через його домінування над іншими, є досить мало ймовірною хоча теоретично можливою. Рішення, які приймаються, не завжди враховують тільки один якийсь ресурс, чи планують єдиний шлях розвитку і т.п. Увесь розвиток людства побудований на компромісах і поєднанні різних можливостей задля досягнення поставленої мети. Особливо це треба враховувати у моделюванні сільськогосподарського виробництва із урахуванням екологічних та економічних чинників. Адже дуже часто оптимізаційні критерії цих двох складових є конфліктними, або взаємо протилежними чи навіть взаємовиключаючими. Тому в реальному житті доцільним є пошук розв'язків у змішаних стратегіях.

Якщо позначити через $x_1, x_2, \ldots x_m$ ймовірності (частоти), з якими перший гравець вибирає відповідно першу, другу, … , m,-ту чисті стратегії, так, що $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ $(i = 1,2,\ldots m)$;

через $y_1, y_2, \ldots y_n$ ймовірності, з якими другий гравець вибирає першу, другу, … , чисті стратегії, причому

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad (j = 1,2,\ldots n).$$

То набори чисел $x = (x_1, x_2, \ldots x_m)$ та $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ називаються змішаними стратегіями першого і другого гравців відповідно.

Кожен з гравців має нескінченну множину змішаних стратегій. Множина змішаних стратегій першого гравця позначається через S_1, а множина змішаних стратегій другого гравця через S_2. Задача першого гравця полягає в виборі такої стратегії $x^* \in S_1$, щоб при відсутності інформації про вибір стратегії другого гравця максимізувати свій виграш. Задача другого гравця полягає в виборі такої стратегії $y^* \in S_2$, щоб при відсутності інформації про вибір поведінки першого гравця мінімізувати його виграш.

Якщо перший гравець застосовує стратегію $x \in S_1$, й другий – стратегію $y \in S_2$, то середній виграш $M(x, y)$ першого гравця становить

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{3}$$

Виграш $M(x, y)$ називають *функцією гри*.

Пара змішаних стратегій (x^*, y^*) називається *сідловою* точкою функції $M(x, y)$, якщо

$$M(x, y^*) \leq M(x^*, y^*) \leq M(x^*, y) \tag{4}$$

Кожна матрична гра з нульовою сумою має розв'язок у змішаних стратегіях. Тобто, існують такі змішані стратегії x^* першого і y^* другого гравців, для яких виконується умова (4). Гарантований виграш першого гравця, що застосовує змішану стратегію x, визначається за виразом

$$v_1(x) = \min_{y \in S_2} M(x, y)$$

$$S_2 = \left\{ y : y = (y_1, y_2, ..., y_n), \quad y_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\} \tag{5}$$

Стратегія x^*, при якій гарантований виграш першого гравця досягає максимального значення, називається *оптимальною стратегією* першого гравця.

$$v_1\left(x^*\right) = \max_{x \in S_1} v_1(x) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} M(x, y) \tag{6}$$

$$S_1 = \left\{ x : x = (x_1, x_2, ...x_m), \quad x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_j = 1 \right\}$$

Гарантований програш другого гравця визначається за виразом

$$u_2(y) = \max_{x \in S_1} M(x, y) \tag{7}$$

Якщо y^* – оптимальна стратегія другого гравця, то

$$u_2\left(y^*\right) = \min_{y \in S_2} u_2(x) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} M(x, y)$$

Гарантований виграш першого гравця, що застосовує свою оптимальну стратегію, дорівнює гарантованому програшу другого гравця, що застосовує свою оптимальну стратегію:

$v_1\left(x^*\right) = u_2\left(y^*\right) = v^*$; v^* – ціна гри.

Для знаходження розв'язку у змішаних стратегіях існує декілька способів, а саме:

- графічне розв'язання [2, 6];
- приведення задачі теорії ігор до задачі лінійного програмування із наступним розв'язанням симплекс методом, або із використанням ЕОМ у середовищі електронних таблиць MS Excel за допомогою надбудови **Поиск решения**[**] [2-6].

Графічний спосіб розв'язання матричної гри. Розглянемо гру $2 \times n$, в якій гравець A має лише дві стратегії.

У ході гри перший гравець змішує стратегії A_1 і A_2 з відповідними ймовірностями x_1 та $1 - x_1$, $0 \leq x_1 \leq 1$. Гравець B змішує стратегії B_1, B_2, ..., B_n з ймовірностями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ де $y_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$;

$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$. У цьому випадку очікуваний виграш гравця A, що відповідає j-й чистій стратегії гравця B розраховується за формулою

$(a_{1j} - a_{2j})\, x_1 + a_{2j}, j = 1, , \ldots, n.$

Відповідно, гравець A шукає величину x_1, яка максимізує мінімум очікуваних виграшів $\max\limits_{x_1} \min\limits_{j} \left\{ (a_{1j} - a_{2j}) x_1 + a_{2j} \right\}$.

[*] Назва засобу наводиться мовою оригіналу – російською мовою.

Приклад 2. У фермерському господарстві планується вирощування двох видів ягідних культур – малини та смородини. Знайти співвідношення між кількістю кущів кожного виду, враховуючи, що щільність висаджування кущів, на спеціально відведеній для цього ділянці, повинна бути однакова. Надходження (в грош. од.) від кожного куща на одиницю витрат щорічно в залежності від рівня агротехнічних умов вирощування плануються наступні:

Вид кущів \ Рівень агротехніки	Високий	Низький
Малина	3	2
Смородина	-1	4

Розв'язання. Умови вирощування будемо розглядати як протидіючого гравця, враховуючи при цьому, що несприятливі умови для одного виду кущів, можуть бути сприятливими для інших.

Платіжна матриця: $H = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

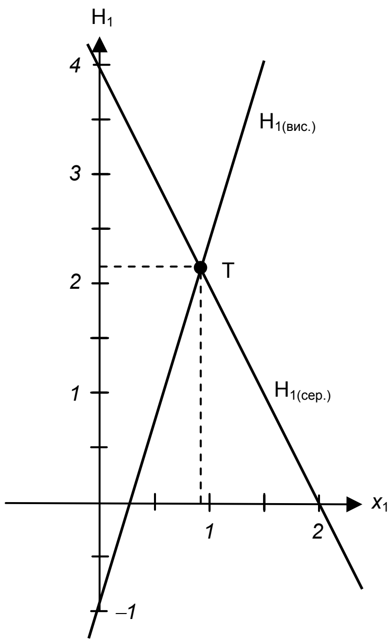
У чистих стратегіях задача розв'язку не має, тобто нема сенсу використовувати лише один тип кущів.

Нижня границя гри:

$$\underline{V} = \max_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\} = 2$$

Верхня границя гри:

$$\overline{V} = \min_{1 \le j \le n} \beta_j = \min_{1 \le j \le n} \left\{ \max_{1 \le i \le m} a_{ij} \right\} = 3$$



Отже розв'язок шукатимемо у змішаних стратегіях, тобто слід знайти співвідношення між кількістю кущів кожного виду. Садіння кущів першого виду вважатимемо першою стратегією, а другого – другою. Позначимо через x_1 частку кущів малини. Тоді частка кущів смородини у загальній кількості кущів для висадки, дорівнюватиме: $x_2 = 1 - x_1$, а очікувані від малини надходження становитимуть:

$$H_{1(\text{високий})} = 3x_1 - (1 - x_1) = 4x_1 - 1$$
$$H_{1(\text{низький})} = 2x_1 + 4(1 - x_1) = -2x_1 + 4$$

У прямокутній системі координат (H, x_1) побудуємо відповідні графіки. Кожен з графіків буде зображений у вигляді прямої. Прямі перетинаються у точці Т, саме у ній і знаходиться найбільше значення гарантованих надходжень.

Координати точки Т знаходяться так:

$-2x_1 + 4 = 4x_1 - 1$

$x_1 = 0{,}83$

$Н = -2 \times 0{,}83 + 4 = 2{,}34$

$x_2 = 1 - x_1 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17$

Висновок: за даних умов фермеру доцільно посадити малини і смородини у співвідношенні 0,83 : 0,17. Найбільші гарантовані надходження при цьому складатимуть 2,34 грош. од. на одиницю витрат.

Приведення задач теорії ігор до задачі лінійного програмування. Задача максимізації гарантованого виграшу першого гравця і задача мінімізації гарантованого програшу другого гравця зводиться до пари взаємодвоїстих задач лінійного програмування [2]:

Задача першого гравця

$$F = v(\max)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v \quad j = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots m$$

Задача другого гравця

$$\Phi = u(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq u \quad i = 1, 2, \ldots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots n$$

Процес розв’язання таких задач спрощується, якщо перейти до змінних $\xi_i = \dfrac{x_i}{v}$ $i = 1, 2, \ldots m,$ $r_i = \dfrac{y_j}{u},$ $j = 1, 2, \ldots n.$

Це можливо за умови, що $a_{ij} \geq 0$

Маємо

Задача першого гравця

$$f = \sum_{i=1}^{m} \xi_i (\min)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \xi_i \geq 1 \quad j = 1, 2, \ldots n$$

$$\xi_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots m$$

Задача другого гравця

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} r_j (\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j \leq 1 \quad i = 1, 2, \ldots m$$

$$r_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots n$$

Приклад 3. М’ясомолочне господарство, яке має власний ковбасний цех, може виробляти три види продукції – молоко, м’ясо та ковбасні вироби, отримуючи прибуток в залежності від попиту, який умовно може бути визначений трьома різними станами – високий, середній та низький. Платіжна матриця прибутків підприємства у тис. грн. за умови випуску *i*-ї продукції при *j*-тому попиті на неї має вигляд:

$$H = \begin{bmatrix} 30 & 60 & 80 \\ 90 & 40 & 20 \\ 70 & 50 & 40 \end{bmatrix}$$

Необхідно визначити оптимальні пропорції у виробництві продукції, які гарантували б отримання найбільшого гарантованого прибутку за будь-якого попиту.

Розв'язання. В чистих стратегіях задача розв'язку не має, тобто нема сенсу виробляти лише один вид продукції.

Нижня границя гри: $\underline{V} = \max\limits_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max\limits_{1 \le i \le m} \left\{ \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\} = 40$

Верхня границя гри: $\bar{V} = \min\limits_{1 \le j \le n} \beta_j = \min\limits_{1 \le j \le n} \left\{ \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij} \right\} = 60$

Оптимальний розв'язок будемо шукати у змішаних стратегіях $S_A^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0)$, $S_B^0 = (q_1^0, q_2^0, q_3^0)$, де p_i^0 та q_i^0 – відповідні значення ймовірностей.

Задача першого гравця

$30p_1 + 90p_2 + 70p_3 \ge V$
$60p_1 + 40p_2 + 50p_3 \ge V$
$80p_1 + 20p_2 + 40p_3 \ge V$
$p_1 + p_2 + p_3 = 1$
$p_i \ge 0;\ i = 1, 2, 3$
$Z^1_{max} = V$

Задача другого гравця

$30q_1 + 60q_2 + 80q_3 \le V$
$90q_1 + 40q_2 + 20q_3 \le V$
$70q_1 + 50q_2 + 40q_3 \le V$
$q_1 + q_2 + q_3 = 1$
$q_i \ge 0;\ j = 1, 2, 3$
$Z^2_{min} = V$

Введемо змінні $x_i = p_i^0 / V\ (i = 1, 2, 3)$ та $y_j = q_i^0 / V\ (j = 1, 2, 3)$, де V – ціна гри. Тоді спряжені (двоїсті) задачі матимуть вигляд:

Задача першого гравця

$30x_1 + 90x_2 + 70x_3 \ge 1$
$60x_1 + 40x_2 + 50x_3 \ge 1$
$80x_1 + 20x_2 + 40x_3 \ge 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1/V$
$x_i \ge 0;\ i = 1, 2, 3$
$Z^1_{max} = V$
або

Задача другого гравця

$30y_1 + 60y_2 + 80y_3 \le 1$
$90y_1 + 40y_2 + 20y_3 \le 1$
$70y_1 + 50y_2 + 40y_3 \le 1$
$y_1 + y_2 + y_3 = 1/V$
$y_i \ge 0;\ j = 1, 2, 3$
$Z^2_{min} = V$
або

$30x_1 + 90x_2 + 70x_3 \geq 1$
$60x_1 + 40x_2 + 50x_3 \geq 1$
$80x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 1$
$x_i \geq 0;\ i = 1, 2, 3$
$Z^1_{min} = x_1 + x_2 + x_3$

$30y_1 + 60y_2 + 80y_3 \leq 1$
$90y_1 + 40y_2 + 20y_3 \leq 1$
$70y_1 + 50y_2 + 40y_3 \leq 1$
$y_i \geq 0;\ j = 1, 2, 3$
$Z^2_{max} = y_1 + y_2 + y_3$

Розв'яжемо другу задачу, застосовуючи стандартний симплекс-метод (табл.1). Приведемо задачу до канонічного вигляду ввівши додаткові змінні:

$30y_1 + 60y_2 + 80y_3 + y_4 = 1$
$90y_1 + 40y_2 + 20y_3 + y_5 = 1$
$70y_1 + 50y_2 + 40y_3 + y_6 = 1$
$Z^2_{max} = y_1 + y_2 + y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6$

Оскільки елементи останнього рядка симплекс-таблиці додатні, то оптимальним розв'язком задачі є: Y^0 = (1/270; 4/270; 0; 0; 2/27; 0).

1. Симплекс таблиця із розв'язком задачі другого гравця

i	$Б$	C_j / C_i	B_i	1	1	1	0	0	0	b_i/a_{ij}^*
				y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
1	y_4	0	1	30	60	80	1	0	0	1/60
2	y_5	0	1	90	40	20	0	1	0	1/40
3	y_6	0	1	70	50	40	0	0	1	1/50
$m+1$	Z_j		0	-1	-1	-1	0	0	0	
1	y_2	1	1/60	1/2	1	4/3	1/60	0	0	1/30
2	y_5	0	1/3	70	0	-100/3	-2/3	1	0	1/210
3	y_6	0	1/6	90/2	0	-80/3	-5/6	0	1	1/270
$m+1$	Z_j		1/60	-1/2	0	1/3	1/60	0	0	
1	y_2	1	4/270	0	1	28/27	7/270	0	1/90	
2	y_5	0	2/27	0	0	-2020/27	17/27	1	-14/9	
3	y_1	1	1/270	1	0	16/27	-5/270	0	2/90	
$m+1$	Z_j		5/270	0	0	17/27	2/270	0	1/90	

На основі взаємозв'язку між змінними спряжених задач:

x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	x_2
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_5

Отже оптимальний розв'язок першої задачі:
X^0 = (2/270; 0; 1/90; 0; 0; 17/27), $Z^1_{max} = Z^2_{min}$ = 5/270.

Таким чином ціна гри $V = 1/ Z^1_{max} = 1 / Z^2_{min} = 540 / 10 = 54$. Знаходимо оптимальну стратегію $S_A^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0)$. Знаючи, що $p_i^0 = x_i \times V$, отримуємо: $p_1^0 = 2/270 \times 54 = 0,4$; $p_2^0 = 0 \times 54 = 0$; $p_3^0 = 1/90 \times 54 = 0,6$.

Таким чином підприємству для отримання найбільшого гарантованого прибутку у розмірі 54 тис. грн. доцільно дотримуватися наступних пропорцій у виробництві продукції: 40% – вироблення молока; 60% – вироблення ковбасних виробів; продавати ж м'ясо без переробки за даних умов недоцільно.

Надзвичайно корисним математичний апарат теорії ігор є у тваринництві тому, що дає змогу підібрати оптимальні умови утримання тварин, їх годівлі і т.ін. з метою отримання максимально можливого гарантованого зиску враховуючи при цьому лімітуючі фактори як зовнішнього середовища (в тому числі й екологічні) так і ресурсного забезпечення.

Приклад 4. Одним з головних факторів зовнішнього середовища, який істотно впливає на продуктивність корів, є температура в приміщенні, де утримуються корови. Середній добовий надій при різних поживностях раціону і температурі навколишнього середовища заданий матрицею

$$A = \begin{Vmatrix} 12 & 15 & 14 \\ 15 & 17 & 13 \\ 14 & 18 & 15 \end{Vmatrix}$$

Необхідно визначити поживність раціону в залежності від температури навколишнього середовища.

Розв'язання. Поживність може мати три дискретні значення. Через x_1 позначимо частку раціону з найменшою поживністю в загальній поживності, через $– x_2 –$ частку раціону з середньою поживністю, через x_3 – позначимо частку раціону з найбільшою поживністю. Тоді

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Вклад x_1, x_2 та x_3 та в добовому надої молока на 1 корову при $t = t_1$°C описується нерівністю

$12x_1 + 15x_2 + 14\,x_3 \geq x_4$.

Аналогічні нерівності складаємо для $t = t_2$°C та $t = t_3$°C

$15x_1 + 17x_2 + 18\,x_3 \geq x_4$

$14x_1 + 13x_2 + 15\,x_3 \geq x_4$,

де x_4 оптимальний середньодобовий надій молока на 1 корову.

$x_4 = Z_{max}$.

Виконавши перенесення x_4 в ліву частину нерівностей маємо задачу лінійного програмування

$12x_1 + 15x_2 + 14\,x_3 - x_4 \geq 0$

$15x_1 + 17x_2 + 18x_3 - x_4 \geq 0$
$14x_1 + 13x_2 + 15x_3 - x_4 \geq 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 = 1$
$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = Z_{max}$

Модель задачі у середовищі MS Excel виглядає так (рис. 1). Використавши засіб **Поиск решения** отримуємо наступний результат (рис. 2): $x_1=0$; $x_2=0{,}33$; $x_3 = 0{,}67$; $x_4 = 14{,}33$.

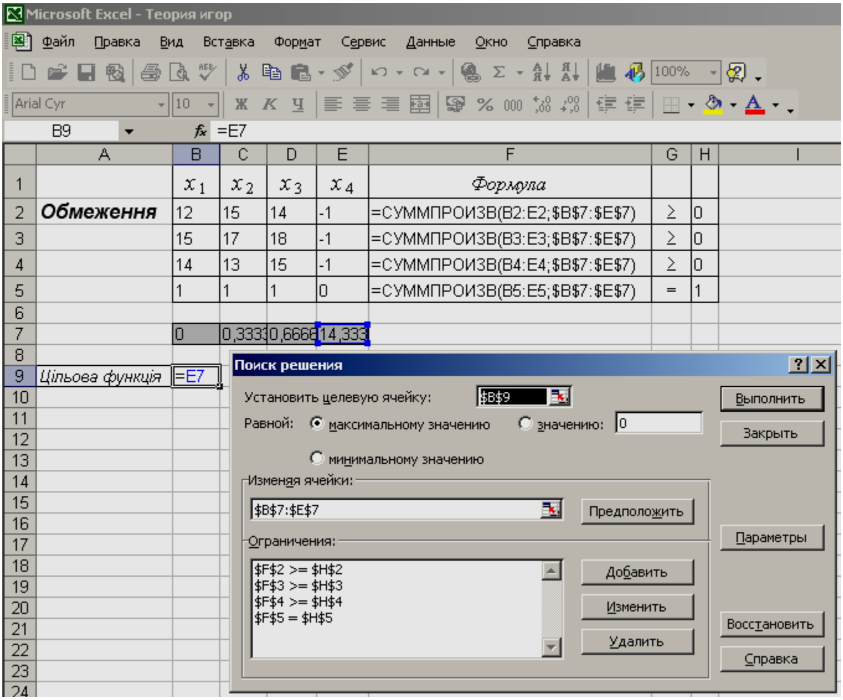
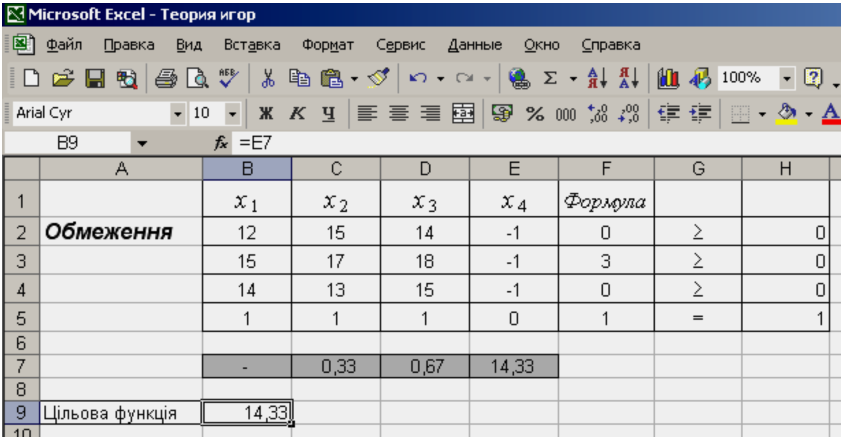


Рис. 1. Модель задачі у середовищі MS Excel та вид вікна Поиск решения

Тобто, якщо перше дискретне значення поживності взяти 10 к. од. , друге 11 к.од., а третє 12 к.од., то щоб гарантувати надій молока від корови 14,333 кг при температурі, яка змінюється в межах від t_1°C по t_3°C (наприклад, від 5°C до 30°C) необхідно взяти раціон поживністю

$10 \cdot 0 + 11 \cdot 0{,}333 + 12 \cdot 0{,}667 = 11{,}67$ (к.од.).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x_1	x_2	x_3	x_4	Формула		
2	**Обмеження**	12	15	14	-1	0	≥	0
3		15	17	18	-1	3	≥	0
4		14	13	15	-1	0	≥	0
5		1	1	1	0	1	=	1
6								
7		-	0,33	0,67	14,33			
8								
9	Цільова функція	14,33						

Рис. 2. Розв’язок задачі

Висновки. Таким чином, використання математичного апарату теорії ігор є доцільним і може знайти досить широке застосування у сільськогосподарському виробництві, бо дає змогу суттєво зменшити рівень невизначеності при прийнятті управлінських рішень з метою забезпечення цілеспрямованих дій по одержанню високого врожаю за різних (не передбачуваних) природних умов із урахуванням екологічного та економічного факторів виробництва. Переваги даного підходу полягають, як це не дивно, у його песимістичності, а саме – модель дає можливість знайти найкращий гарантований результат із найгірших можливих варіантів. Таким чином підприємство має змогу обрати стратегію вирощування культур, технологію обробітку, стратегію розвитку і т.п., які за будь-яких зовнішніх умов надаватимуть можливість отримати хоча й мінімальний, але гарантований прибуток.

Бібліографічний список

1. Браславец М.Е. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства. – М.: Экономика, 1971. – 361 с.

2. Калініченко А.В., Костоглод К.Д., Протас Н.М. Використання оптимального програмування при розв’язанні задач сільськогосподарського виробництва. – Полтава: Інтерграфіка, 2004. – 106 с.

3. Мур Дж., Уэдерфорд Л. Економическое моделирование в Microsoft Excel, 6-е изд.: Пер. с англ.. – М.: Издательский дом «Вільямс», 2004. – 1024 с.

4. Практикум по математическому моделированию экономических процессов в сельском хозяйстве /Карпенко А.Ф., Кардаш В.А., Низова Н.С. и др.; Под ред. Карпенко А.Ф. – М.: Агропромиздат, 1985. – 269 с.

5. Царенко О.М., Злобін Ю.А., Скляр В.Г., Панченко С.М. Комп'ютерні методи в сільському господарстві та біології: Навчальний посібник. – Суми: Вид-во «Університетська книга», 2001. – 203 с.

6. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.