

## МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС КОАГУЛЯЦІЇ ДОМІШОК У ДИСПЕРСНИХ ПОТОКАХ.

**П. І. Осадчук** канд. тех. наук., **В. Я. Гамолич** інженер.  
*Одеський державний аграрний університет*

Зміна дисперсного складу домішок при коагуляції розглядається на основі поняття анізотропії вільного пробігу часток і спеціальної шкали класових інтервалів гістограми розподілу їхніх розмірів. Імовірності класових інтервалів обчислюються методами теорії марковських ланцюгів.

**Ключові слова:** дисперсний потік, коагуляція, марковські ланцюги, матриця.

**Вступ.** У зв'язку з ростом споживчого попиту на рослинні олії. У фасованому й нефасованому виді для домашньої кулінарії, мережі суспільного та дієтичного харчування однієї із самих актуальних завдань в умовах складної ринкової економіки залишається підвищення якості та конкурентоспроможності вітчизняних видів рослинних масел що володіють підвищеною біологічною цінністю та стабільністю в процесі тривалого зберігання.

**Проблема.** Рослинні олії, як пресові, так і екстракційні, являють - собою складну багатокомпонентну систему, у якій, крім механічних домішок утримуються цілий ряд супутніх речовин.

Біологічна повноцінність і екологічна безпека харчових, зокрема жирових, продуктів - найважливіше завдання при їхньому виробництві. У виробництві рослинних масел екологічна чистота досягається технологічними обробками, що приводять до видалення небажаних з'єднань і домішок.

У цей час виникла необхідність у технічному переозброєнні Українських масложирових підприємств у зв'язку з моральним і фізичним спрацюванням устаткування, а також створенню нових міні цехів для виробництва якісних рослинних олій.

Для створення необхідного встаткування є потреба у розробці математичних апаратів для розрахунків протікання тих або інших технологічних процесів на різноманітному обладнанні.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Аналізуючи літературні джерела прийшли к висновку практичної відсутності математичних моделей розрахунку процесу коагуляції. Який при очищенні рослинних олій займає дуже важливе місце.

**Мета досліджень.** Отримати математичний опис протікання процесу коагуляції при очищенні рослинних олій. Який дозволить розраховувати оптимальний час коагуляції на обладнанні, яке використовується при первинному і вторинному очищенні рослинних олій.

**Результати досліджень.** У дисперсних потоках зважено несуче середовище має поле швидкостей, що породжує друге поле швидкостей, де є присутнім новий параметр - розмір частки  $\delta$ . Цей параметр входить у розподіл часток по швидкостях, що є основною причиною принципової відмінності кінетики молекул газу від кінетики часток домішки. Якщо в кінетичній теорії газів довжина вільного пробігу не залежить від напрямку, то ймовірність зіткнення частки залежить від напрямку її руху. Звідси потреба доцільності введення поняття анізотропії вільного пробігу часток. У роторних машинах варто розрізняти довжини вільних пробігів у радіальному й тангенціальному напрямку, а при пласко - паралельному русі - у поздовжньому й поперечному напрямку. Тому надалі під швидкістю частки будемо розуміти одну з її компонентів (ту, у напрямку якої відбувається найбільше число зіткнень)

Позначимо  $\mathcal{V}(\delta)$  - швидкість частки діаметра  $\delta$ . Тут під діаметром будемо розуміти діаметр кулі, еквівалентний по обсязі частці. На відстані довжини вільного пробігу  $\ell$  еквівалентна куля витісняє простір, що має обсяг:

$$V = \frac{\pi \delta^2}{4} \ell$$

Тому що обсяг еквівалентної частці кулі дорівнює

$$V = \frac{\pi \delta^3}{6},$$

то за час вільного пробігу куля займала частку простору, витиснутого їм, рівну:

$$C = \frac{V_\ell}{V} = \frac{2\delta}{3\ell}$$

Ця частка є локальною моделлю об'ємної концентрації, звідки слідує формула довжини вільного пробігу часток:

$$\ell = \frac{2\delta}{3c}, \quad (1)$$

де  $c$  - об'ємна концентрація часток у дисперсному потоці.

У рівності (1) всі три величини мають середні значення. Більше точна формула (1) має вигляд:

$$\ell = \frac{2m_3}{3cm_2},$$

де  $m_2, m_3$  - початкові моменти розподілу часток по діаметрах:

$$m_2 = \int_0^{\infty} \delta^2 f(\delta) d\delta, \quad m_3 = \int_0^{\infty} \delta^3 f(\delta) d\delta$$

$f(\delta)$  - щільність імовірності розподілу часток по розмірах.

Для більшості домішок  $f(\delta)$  - щільність імовірності логнормального закону розподілу.

Щоб вийти на залежність ефективності коагуляції від часу, запишемо час вільного пробігу

$$t = \frac{\ell}{\mathcal{G}}, \quad (2)$$

де  $\mathcal{G}$  - дифузійна швидкість, рівна середньому квадратичному відхиленню,

$$\text{т. е. } \mathcal{G} = \sqrt{D_V},$$

$$\text{де } D_V = \frac{1}{\sigma(\delta_{\max} - \delta_{\min})} \iiint_{\sigma} d\sigma \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} (\mathcal{G}(\delta) - \bar{\mathcal{G}})^2 d\delta,$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{1}{\sigma(\delta_{\max} - \delta_{\min})} \iiint_{\sigma} d\sigma \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \mathcal{G}(\delta) d\delta,$$

$\sigma$  - обсяг робочої зони,

$\delta_{\max}, \delta_{\min}$  - границі варіації діаметрів часток.

Приймаючи час вільного пробігу за одиницю дискретного часу, можна будувати матриці перехідних ймовірностей Марковського ланцюга.

Коагуляцію часток дисперсного середовища визначає не стаціонарний випадковий процес із функцією розподілу часток по розмірах для будь-якого моменту часу. Якщо діапазон розмірів  $x_0 < x < x_n$  розділити на  $n$  класів ( $x_{i-1} < x < x_i, i = 1; 2; \dots; n$ ), то стан системи яка складається із цих класів буде описувати вектор

$$\bar{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_i(t), \dots, p_n(t)), \quad (3)$$

де  $p_i(t)$  - імовірність приналежності розміру частки до  $i$ -го класу в момент  $t$ .

У такий спосіб дослідження коагуляції часток можна звести до вивчення систем з дискретним числом станів, застосовуючи для цього теорію марковських ланцюгів, графічну інтерпретацію стану марковського ланцюга зображує гістограма гранулометричного состава в момент  $t$ . Щоб одержати

вектор  $\bar{p}$ , треба визначити границі класів так щоб матриця перехідних ймовірностей  $p_{ij}$  мала найбільш простий вид, тобто мала як можна більше

число нулів. Очевидно що  $p_{ij} = 0$ , якщо  $i > j$ . Ця властивість потрібна для того що при склеюванні двох часток нова частка не може мати еквівалентний розмір менше кожної з них.

Покажемо, що при відношенні:

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = \sqrt[3]{2}$$

діагональні елементи матриці перехідних ймовірностей дорівнюють нулю. Дійсно, якщо дві мінімальні частки  $i$ -го класу утворили нову частку, то новий еквівалентний діаметр  $\delta_j$  отриманий з рівності

$$\delta_j^3 = 2 \delta_{i-1}^3$$

Звідки отримаємо

$$\frac{\delta_j}{\delta_{i-1}} = \sqrt[3]{2}$$

Тому для будь-яких двох часток  $\delta'$  і  $\delta''$  з інтервалу  $\delta_{i-1} < \delta < \delta_i$  має місце нерівність

$$(\delta')^3 + (\delta'')^3 \geq 2(\delta_{i-1})^3 = \delta_i^3$$

Тоді за умови  $p_{ii} = 0$  матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1i} & \dots & p_{1,n-2} & p_{1,n-1} & p_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & p_{23} & \dots & p_{2i} & \dots & p_{2,n-2} & p_{2,n-1} & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & p_{n-2,n-1} & \dots & p_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & p_{n-1,n} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Останній рядок матриці А дає діагональний елемент  $p_{nn} = 1$ , якщо номер  $n$  приписати класовому інтервалу  $x_{n-1} < x < \infty$ .

Обчислимо перехідні ймовірності першого рядка матриці А. Для цього запишемо границі класів у порядку зростання

$$x_0 < \sqrt[3]{2} x_0 < \sqrt[3]{4} x_0 < 2x < 2\sqrt[3]{2} x_0 < 2\sqrt[3]{4} x_0 < \dots < \sqrt[3]{2^i} x_0 < \dots < \sqrt[3]{2^n} x_0 < \dots$$

Якщо поєднуються частки першого класу, то вони утворять частки в інтервалі

$$\sqrt[3]{2} x_0^3 < x < \sqrt[3]{2(\sqrt[3]{2} x_0)^3}; \sqrt[3]{2} x_0 < x < \sqrt[3]{4} x_0$$

Аналогічно одержимо інтервали нових часток, утворених у результаті злипання часток першого класу із частками інших класів (табл.1).

Таблиця 1. Інтервали нових часток після коагуляції за участю часток першого класу.

j	Інтервал нової частки	Довжина інтервалу
1	$2^{\frac{1}{3}} x_0 < x < 2^{\frac{1}{3}} (1 + 2^0)^{\frac{1}{3}} x_0$	$\sqrt[3]{2} (\sqrt[3]{2} - 1) x_0$
2	$(1 + 2)^{\frac{1}{3}} x_0 < x < (2(1 + 2))^{\frac{1}{3}} x_0$	$\sqrt[3]{3} (\sqrt[3]{2} - 1) x_0$
3	$(1 + 2^2)^{\frac{1}{3}} x_0 < x < (2(1 + 2^2))^{\frac{1}{3}} x_0$	$\sqrt[3]{5} (\sqrt[3]{2} - 1) x_0$
.	.....	.....
.	.....	.....
.	.....	.....
j	$(1 + 2^{j-1})^{\frac{1}{3}} x_0 < x < (2(1 + 2^{j-1}))^{\frac{1}{3}} x_0$	$\sqrt[3]{1 + 2^{j-1}} (\sqrt[3]{2} - 1) x_0$
.	.....	.....
.	.....	.....
.	.....	.....
n	$(1 + 2^{n-1})^{\frac{1}{3}} x_0 < x < (2(1 + 2^{n-1}))^{\frac{1}{3}} x_0$	$\sqrt[3]{1 + 2^{n-1}} (\sqrt[3]{2} - 1) x_0$

Позначимо:

$S_{ij}$  - довжина інтервалу отриманого в результаті перетинання  $i$ -го класу гістограми з  $j$ -м класом таблиці 1

$l_i$  - довжина  $i$ -го класу гістограми

$L_j$  - довжина  $j$ -го інтервалу таблиці 1

Кожний інтервал таблиці 1 можна представити лінійною комбінацією класів гістограми та одержати рівність

$$\sum_{i=1}^n S_{ij} = L_j = (\sqrt[3]{2} - 1) \sqrt[3]{1 + 2^{j-1}} x_0$$

Ліву частину цієї рівності можна перетворити до виду

$$\sum_{i=1}^n S_{ij} = \sum_{i=1}^n \theta_{ij} l_i$$

Де  $\theta_{ij}$  - коефіцієнт, значення якого лежать в інтервалі  $[0,1]$ .

Після підстановки

$$l_i = \sqrt[3]{2^{i-1}} (\sqrt[3]{2} - 1) x_0$$

знаходимо

$$(\sqrt[3]{2} - 1) x_0 \sum_{i=1}^n \theta_{ij} \sqrt[3]{2^{i-1}} = (\sqrt[3]{2} - 1) x_0 \sqrt[3]{1 + 2^{j-1}} \quad (4)$$

Тепер можна обчислити перехідну ймовірність  $P_{ij}$ , що дорівнює

геометричної ймовірності, тобто відношенню суми відрізків з довжинами  $S_{ij}$  до сум відрізків з довжинами  $L$ .

$$P_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^n S_{ij}}{\sum_{j=1}^n L_j}$$

Після скорочень з урахуванням (4) одержимо

$$P_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{1 + 2^{i-1}}} \quad (5)$$

Аналогічно обчислюються всі перехідні ймовірності  $P_{ij}$ . Поняття щільності потоку подій  $a_{ij}$  даної системи стану визначаються відношенням

$$a_{ij} = \frac{P_{ij}}{\bar{t}}$$

де  $\bar{t}$  - середній час вільного пробігу частки дисперсної фази. При відомих значеннях щільності потоків обчислення вектора (3) зводиться до рішення системи рівнянь Колмогорова з початковими умовами

$$P_1(0) = p_{01}; p_2(0) = p_{02}; \dots; p_n(0) = p_{0n}; \sum_{i=1}^n p_{0i} = 1.$$

Для розрахунку процесу коагуляції використовуємо (5) і одержимо матрицю перехідних ймовірностей

$$A = \|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0..0,165 & ..0,168 & ..0,145 & ..0,135 & ..0,131 & ..0,129 & ..0,127 \\ 0..0 & ..... & 0,199 & ..0,180 & ..0,165 & ..0,157 & ..0,150 & ..0,150 \\ 0..0 & ..... & 0 & ..... & 0,231 & ..0,210 & ..0,194 & ..0,181 & ..0,183 \\ 0..0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0,276 & ..0,252 & ..0,249 & ..0,221 \\ 0..0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0,347 & ..0,317 & ..0,339 \\ 0..0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0,462 & ..0,538 \\ 0..0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 1 \\ 0..0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 0 & ..... & 1 \end{pmatrix}$$

У цих розрахунках будемо використовувати концентрацію домішок  $c_0$  і середню довжину вільного пробігу

$$l_0 = \frac{2m_3}{3c_0m_2}$$

Де  $l_0$  - середня довжина вільного пробігу часток домішок до її злиття з іншою часткою,

Якщо середня швидкість руху частки дорівнює  $\mathcal{G}_0$ , то час шляху дорівнює

$$\tau_1 = \frac{l_0}{\mathcal{G}_0} = \frac{2 m_{31}}{3 c_0 m_{21} \mathcal{G}_0}$$

Другий індекс обох моментів показує номер розрахункового кроку програми.

Розглянемо докладно процес зміни гранулометричного складу часток домішок в результаті коагуляції за перший інтервал  $\tau_0$ . Відповідно до теорії марковських ланцюгів за перший крок зміни стану системи вектор стану її стане рівним

$$\overline{P}_1 = (P_{01}, P_{02}, P_{03}, \dots, P_{08}) * A$$

Тут  $P_{0i}$  класова ймовірність перебування частки в  $i$  класі.

$$\sum_{i=1}^8 P_{0i} = 1$$

На рис.1 представлена гістограма початкового розподілу часток по розмірах.

Таблиця 2. Дані гістограми в табличному виді.

I	Клас	Імовірність $P_i$
1	$\delta_0 - \sqrt[3]{2} \delta_0$	0,02
2	$\sqrt[3]{2} \delta_0 - \sqrt[3]{4} \delta_0$	0,08
3	$\sqrt[3]{4} \delta_0 - 2 \delta_0$	0,10
4	$2 \delta_0 - 2 \sqrt[3]{2} \delta_0$	0,33
5	$2 \sqrt[3]{2} \delta_0 - 2 \sqrt[3]{4} \delta_0$	0,29
6	$2 \sqrt[3]{4} \delta_0 - 4 \delta_0$	0,15
7	$4 \delta_0 - 4 \sqrt[3]{2} \delta_0$	0,02
8	$4 \sqrt[3]{2} \delta_0 - \infty$	0,01

Запишемо матрицю - рядок вектора початкового стану

$$\overline{P}_0 = (0,02 ; 0,08 ; 0,10 ; 0,33 ; 0,29 ; 0,15 ; 0,02 ; 0,01) \quad (6)$$

По комп'ютерній програмі обчислюємо вектор  $\overline{P}_1$  методом множення матриці рядок  $\overline{P}_0$  на квадратну матрицю перехідних ймовірностей А. У результаті розрахунку отриманий новий розподіл більших часток:

$$\overline{P}_1 = (0; 0,033 ; 0,019 ; 0,04 ; 0,128 ; 0,199 ; 0,254 ; 0,302 ) \quad (7)$$

Отже, за час  $\tau_1$  початковий дисперсний склад(6) внаслідок процесів коагуляції змінився за рахунок укрупнення часток (7).

Перший крок:  $P_1 = P_0 A$

$$\overline{P}_1 = (0; 0,033 ; 0,019 ; 0,041 ; 0,129 ; 0,198 ; 0,255 ; 0,302 )$$

$$\Delta P_1 = 1 - 0975 = 0,025$$

Другий крок:

$$\overline{P}_1 = (0; 0; 0,007 ; 0,01 ; 0,021 ; 0,061 ; 0,148 ; 0,729 )$$

$$\Delta P_1 = 1 - 097 = 0,03$$

Аналогічно обчислюється гранулометричний склад отриманий за час

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{2 m_{32}}{3 c_0 m_{22} \mathcal{G}_0}$$

Після  $n$  кроків програми дисперсний склад буде підкорятися формулі

$$\overline{P}_n = \overline{P}_0 * A^n$$

$$\left( \begin{array}{l} \overline{P}_1 = \overline{P}_0 * A \\ \overline{P}_2 = \overline{P}_1 * A = P_0 * A * A = P_0 * A^2 \\ \overline{P}_3 = P_2 * A = (P_0 * A^2) * A = P_0 * A^3 \end{array} \right)$$

Час, за який сформувався дисперсний склад  $\overline{P}_n$ , дорівнює:

$$\tau_n = \frac{2}{3 c_0 V} \sum_{k=1}^n \frac{m_{3k}}{m_{2k}}$$

На кожному кроці обчислюється щільність імовірності  $f_k(\delta)$ , по якій обчислюються обидва моменти

$$m_{2k} = \int_0^{\infty} \delta^2 f_k(\delta) d\delta$$

$$m_{3k} = \int_0^{\infty} \delta^3 f_k(\delta) d\delta$$

Щільність імовірності  $f_k(\delta)$  апроксимується згладжуванням гістограми розподілу  $P_k$ .



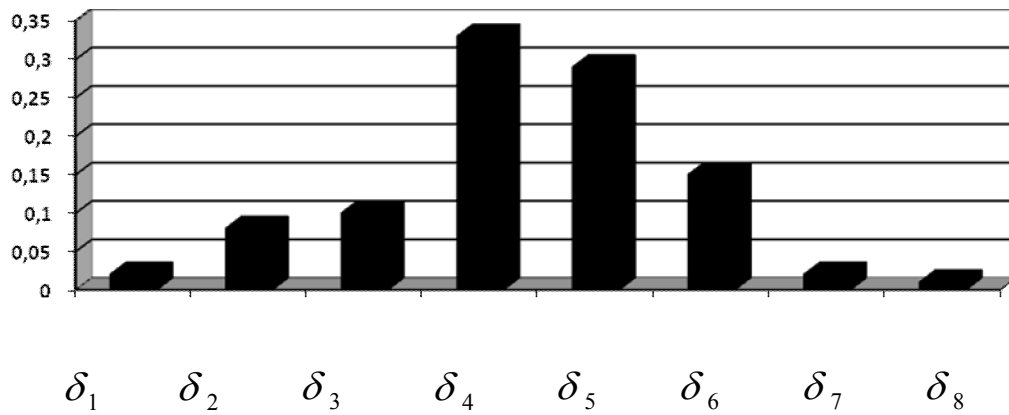


Рис 1. Початковий розподіл часток по розмірах

З представленої гістограма початкового розподілу часток по розмірах бачимо, що найбільша імовірність  $P_i$  припадає на четвертий клас.

**Висновки.** Слідуючи цій методиці, розрахована таблиця перехідних ймовірностей часток у класових інтервалах у результаті злипання після першого зіткнення. Наведені результати були використані при виборі оптимального часу перебування масла в робочій зоні машини.

## ЛІТЕРАТУРА

- 1.Берд Р., Стюарт В., Лай фут Е. Явление переноса. М., "Химия", 1974. 688 с.
- 2.Гурман А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. М., "Высшая школа", 1973. 295 с.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОАГУЛЯЦИИ ПРИМЕСЕЙ В ДИСПЕРСНЫХ ПОТОКАХ.

П. И. Осадчук, В. Я. Гамолич

**Ключевые слова:** дисперсный поток, коагуляция, марковские цепи, матрица.

### Резюме

Изменение дисперсного состава примесей при коагуляции рассматривается на основе понятия анизотропии свободного пробега частиц и специальной шкалы классовых интервалов гистограмми распределения их размеров. Вероятности классовых интервалов исчисляются методами теории марковских цепей.

**THE MATHEMATICAL DESCRIPTION OF COAGULATION OF  
IMPURITY IN DISPERSE STREAMS.**

P.I.Osadchuk, V.J.Gamolich

**Key words:** a disperse stream, coagulation, markovcki circuits, a matrix.

Summary

*Change of disperse structure of impurity at coagulation is considered(examined) on the basis of concept of anisotropy of free run of particles and a special scale of class intervals gistograms distributions of their sizes. Probabilities of class intervals are estimated by methods of the theory markovckix circuits.*